VISUALISASI KONSEP-KONSEP DASAR ANALISIS REAL

DARMADI

UNIPMA Press

Visualisasi Konsep-Konsep Dasar Analisis Real

Darmadi

UNIPMA Press

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-602-0725-37-6
9 786020 725376

VISUALISASI KONSEP-KONSEP DASAR ANALISIS REAL

VISUALISASI KONSEP-KONSEP DASAR ANALISIS REAL

DARMADI

UNIPMA Press
WE GOT IT

VISUALISASI KONSEP-KONSEP DASAR ANALISIS REAL

Penulis:
Darmadi

Perancang Sampul:
Darmadi

Penata Letak:
Darmadi

Cetakan Pertama, Juli 2019

Diterbitkan Oleh:
UNIPMA Press (ANggota IKAPI)
Universitas PGRI Madiun
JI. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
Telp. (0351) 462986, Fax. (0351) 459400
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN: 978-602-0725-37-6

KATA PENGANTAR

Untuk mengingat sesuatu, seperti mengingat seseorang, hewan gajah, sapi, harimau, bangun persegi panjang, persegi, layang-layang, trapesium, atau segitiga umumnya kita membayangkan wajah atau gambaran dari objek tersebut. Artinya, visualisasi membantu kita dalam mengingat segala sesuatu. Visualisasi sering digunakan ahli untuk melihat secara lebih nyata kebenaran suatu teorema atau hipotesis. Buku ini menjelskan konsep-konsep dasar analisis real dengan menggunakan visualisasi.

Buku ini disusun karena analisis real dianggap mata kuliah yang paling sulit diantara mata kuliah yang lain oleh sebagian mahasiswa.

Terimakasih saya sampaikan kepada LPPM Universitas PGRI Madiun karena telah memfasilitasi saya dalam menyusun buku ini. Semoga buku ini mempermudah mahasiswa dalam belajar analisis real.

Penyusun

DAFTAR ISI

BAB I

SISTEM BILANGAN REAL

1.1
RASIONAL-IRRASIONAL

1.2
SIFAT TRIKOTOMI

1.3
NILAI/HARGA MUTLAK

1.4
TOPOLOGI

1.5
BARISAN INTERVAL

1.1
RASIONAL-IRRASIONAL

Capaian pembelajaran:

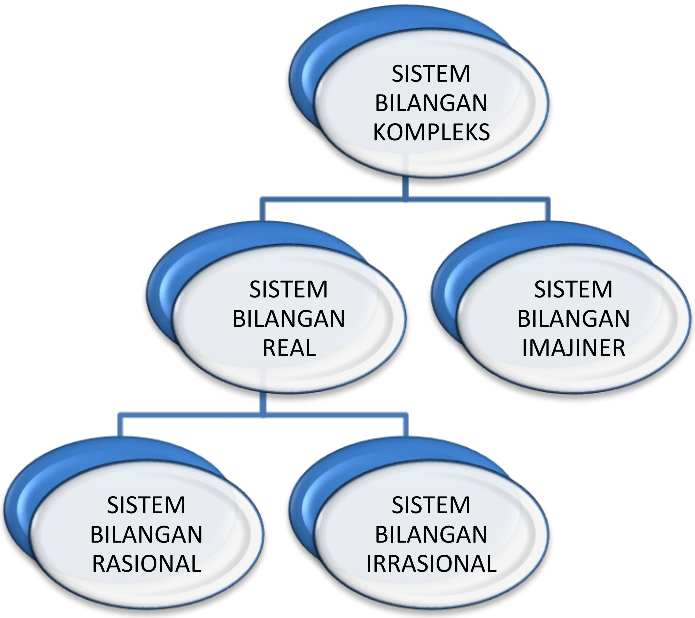
1. *Mahasiswa memahami konsep sistem.*
2. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep system bilangan real-rasional-irrasional)*
3. *Mahasiswa memahami konsep bilangan tak hingga*
4. *Mahasiswa memahami konsep bilangan iirasional*
5. *Mahasiswa dapat membuktikan bilangan rasional*
6. *Mahasiswa dapat membuktikan bilangan irrasional*

CP 1

Sistem adalah kumpulan elemen yang berinteraksi. Elemen-elemen sistem bilangan real adalah bilangan-bilangan real. Operasi-operasi menimbulkan semacam interaksi pada system bilangan real. Karena suatu system pada dasarnya adalah kumpulan dan kumpulan dalam matematika sering disebut himpunan, maka yang dimaksud dengan system bilangan real lebih mengacu pada konsep himpunan bilangan real.

CP 2

Sistem bilangan di atas (yang lebih luas daripada) system bilangan real adalah system bilangan kompleks. System bilangan kompleks dapat dikategorikan dalam 2 kelompok, yaitu: system bilangan real dan system bilangan imajiner. System bilangan real dapat dikategorikan dalam 2 kelompok, yaitu: system bilangan rasional dan system bilangan irrasional. Salah satu model visualisasi system bilangan real-rasional-irrasional adalah sebagai berikut.



System atau himpunan bilangan kompleks dapat dikategorikan menjadi system atau himpunan bilangan real dan system atau himpunan bilangan imajiner. System bilangan kompleks adalah

$$C = \{a + bi | a, b \in R\} \text{ dengan } i = \sqrt{-1}$$

Beberapa contoh bilangan kompleks adalah sebagai berikut.

$$5 + 4i, -3 + 7i,\ 2 - 9i$$

Symbol C untuk system atau himpunan bilangan komplek diambil dari huruf awal *Complex* yang diserap menjadi kompleks dalam bahasa Indonesia.

System atau himpunan bilangan real biasa disimbolkan dengan R. Huruf R diambil dari huruf pertama kata Real. Beberapa contoh bilangan real adalah sebagai berikut.

$$0,\ \tfrac{1}{2},\ \sqrt{2},\ -2,\ \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

CP 3

Pertanyaan yang perlu direnungkan adalah berapakah bilangan real terbesar atau bilangan real terkecil?

Perlu diketahui bahwa bilangan tak hingga ∞ bukan anggota himpunan bilangan real. Untuk memahami ini perhatikan permasalahan berikut.

- Anda tahu bilangan tak hingga ∞?
- Tentukan $\infty + 2$?
- Tentukan $\infty - 2$?
- Sekarang, tentukan $\infty - \infty$?
  - Mungkin jawaban anda 0? Karena bilangan dikurangi bilangan yang sama hasilnya adalah 0.

- Mungkin jawaban anda ∞? Karena bilangan tak hingga ∞ yang pertama lebih besar daripada bilangan tak hingga ∞ yang kedua.
- Mungkin jawaban anda $-\infty$? Karena bilangan tak hingga ∞ yang pertama lebih kecil daripada bilangan tak hingga ∞ yang kedua.
- Mungkin jawaban anda 2? Karena bilangan tak hingga pertama adalah $\infty = \infty + 2$ atau bilangan tak hingga kedua adalah $\infty = \infty - 2$.
- Mungkin jawaban anda -2? Karena bilangan tak hingga pertama adalah $\infty = \infty - 2$ atau bilangan tak hingga kedua adalah $\infty = \infty + 2$.
- Semua jawaban benar karena dapat dicari alasannya.

Karena ketidak konsistenan ini maka $\infty \notin R$ dan $R = (-\infty, \infty)$.

CP 4

Selain system atau himpunan bilangan real, dikenal juga system atau himpunan bilangan imajiner. Beberapa contoh bilangan-bilangan imajiner adalah sebagai berikut.

$$i,\ 2i,\ -3i,\ \frac{1}{2}i,\ \sqrt{2}i$$

Bilangan-bilangan imajiner bukan anggota himpunan bilangan real. Untuk memahami ini, perhatikan.

Kita punya

- $-1.-1 = 1$
- $i^2 = i.i = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$
- $a^2.b^2 = (a.b)^2$
- $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$
- $\sqrt{x} = x^{1/2}$
- $(x^a)^b = x^{a.b}$

Sehingga

$$1 = -1.-1 = i^2.i^2 = (i.i)^2 = (i^2)^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \left((-1)^{1/2}\right)^2 = (-1)^{\left(\frac{1}{2}\right).2} = -1$$

Dan kita punya

- $\sqrt{16} = 4$
- $-4.-4 = 16$
- $\sqrt{a}.\sqrt{b} = \sqrt{a.b}$
- $2i = 2\sqrt{-1} = \sqrt{-4}$
- $a^2.b^2 = (a.b)^2$
- $a.a = a^2$
- $i^2 = i.i = \sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$

Sehingga

$$4 = \sqrt{16} = \sqrt{-4.-4} = \sqrt{-4}.\sqrt{-4} = 2i.2i = (2i)^2 = 4i^2 = 4.-1 = -4$$

Dua contoh di atas menunjukan bahwa terjadi ketidakkonsistensian jika bilangan imajiner menjadi anggota atau masuk ke sistem bilangan real.

CP 5

Sistem bilangan dapat dikategorikan dalam dua kelompok, yaitu sistem bilangan rasional dan sistem bilangan irrasional.

Sistem atau himpunan bilangan rasional sering disimbolkan dengan $Q = \left\{\frac{a}{b} | a, b \in B \text{ dan } b \neq 0\right\}$. Simbol Q diperoleh dari kata *quations*.Semua bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b} | a, b \in B \text{ dan } b \neq 0$ disebut barisan rasional. Beberapa contoh barisan rasional adalah

$$\frac{1}{2},\ 3 = \frac{1}{3},\ 0{,}3030... = \frac{30}{99} = \frac{10}{33}$$

Beberapa mahasiswa masih kesulitan dalam menyatakan bilangan desimal berurutan menjadi bilangan rasional,

Contoh 1. Tentukan bentuk rasional dari 0.3333....
Jawab

Misal x = 0.3333.....
Maka 10 x = 3.3333....
Akibatnya 9x = 3
Diperoleh x = 3/9 = 1/3

Contoh 2. Tentukan bentuk rasional dari 0.2929...
Jawab

Misal x = 0.2929....
Maka 100 x = 29.2929....
Akibatnya 99x = 29
Diperoleh x = 29/99

Contoh 3. Tentukan bentuk rasional dari 2.9292..
Jawab

Misal x = 2.9292....
Maka 100x = 292.9292....
Akibatnya 99x = 290
Diperoleh x=290/99

CP 6

Bilangan real yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $a, b \in B$ dan $b \neq 0$ disebut bilangan irrasional. Beberapa contoh barisan irrasinal adalah

$$\sqrt{2},\ -\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

Bilangan $\sqrt{2}$ merupakan bilangan irrasional

Bukti

Andaikan $\sqrt{2}$ bukan bilangan irrasional.
Maka $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional
Yaitu $\sqrt{2}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ dengan $a, b \in B$ dan $b \neq 0$
Akibatnya $a^2 = 2b^2$
Diperoleh a^2 bilangan genap
Karena a^2 genap, maka a genap (*)
Yaitu a dapat dinyatakan dalam bentuk $a = 2n$ dengan $n \in B$
Akibatnya $a^2 = 4n^2$
Karena $a^2 = 2b^2$, maka $2b^2 = 4n^2$ dan $b^2 = 2n^2$
Diperoleh b^2 bilangan genap
Karena b^2 genap, maka b genap(**)
Karena (*) dan (**) maka a dan b memiliki faktor persekutuan. Terjadi kontradiksi.
Dengan demikian tidak mungkin $\sqrt{2}$ bukan bilangan irrasional.
Bilangan $\sqrt{2}$ merupakan bilangan rasional

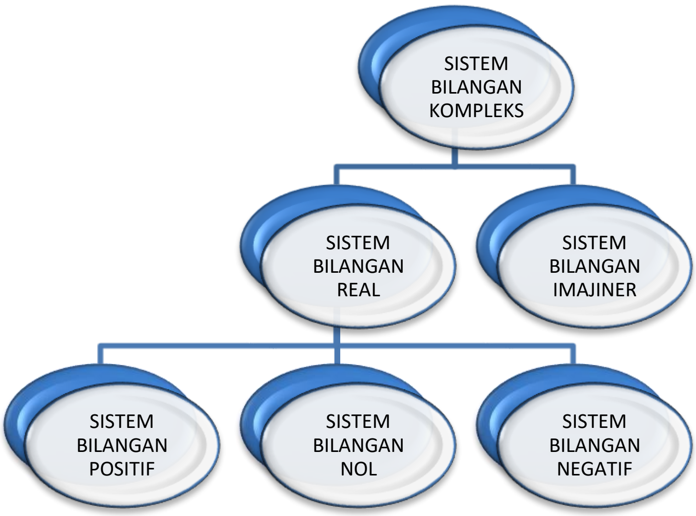
1.2
TRIKOTOMI

Capaian pembelajaran:

1. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep system bilangan real-trikotomi*
2. *Mahasiswa dapat memahami sifat urutan pada system bilangan real*
3. *Mahasiswa memahami lebatnya system bilangan real.*
4. *Mahasiswa dapat memahami konsep nilai/harga mutalk.*
5. *Mahasiswa dapat membuktikan sifat pertidaksamaan segitiga.*

CP 1

Sistem atau himpunan bilangan real juga dapat dikategorikan dalam tiga kelompok. Visualisasi pengelompokan adalah sebagai berikut.



Sistem bilangan real dapat dikategorikan dalam tiga kelompok, yaitu sistem bilangan positif, sistem bilangan nol dan sistem negatif. Setiap bilangan real akan masuk ke salah satu dari ketiga kelompok tersebut dan tidak bisa keduanya atau ketiganya. Oleh karena itu, sistem bilangan real mempunyai sifat trikotomi. Istilah kotomi digunakan sebagai pengelompokan.

Sistem atau himpunan bilangan positif sering disimbolkan dengan P. Simbol P diambil dari huruf pertama kata Positif. Sistem atau himpunan bilangan nol sering disimbolkan dengan {0}.

CP 2

Dari sifat trikotomi ini, muncul sifat urutan pada sistem bilangan real. Urutan pada sistem bilangan real dinyatakan dengan tanda lebih besar dari (>), lebih besar atau sama dengan (≥), lebih kecil dari (<), lebih kecil atau sama dengan (≤), dan sama dengan (=).

Jika

- $x \in P$ maka $x > 0$
- $x \in P \cup \{0\}$ maka $x \geq 0$
- $x \notin P \cup \{0\}$ maka $x < 0$
- $x \notin P$ maka $x \leq 0$
- $x \in \{0\}$ maka $x = 0$

Setiap dua bilangan real dapat dibandingkan antara satu bilangan real dengan satu bilangan real yang lain.

Jika

- $x - y \in P$ maka $x - y > 0$ dan $x > y$
- $x - y \in P \cup \{0\}$ maka $x - y \geq 0$ dan $x \geq y$
- $x - y \notin P \cup \{0\}$ maka $x - y < 0$ dan $x < y$
- $x - y \notin P$ maka $x - y \leq 0$ dan $x \leq y$
- $x - y \in \{0\}$ maka $x - y = 0$ dan $x = y$

Dari sifat urutan, diperoleh sifat lebatnya sistem bilangan real. Antara dua bilangan real, selalu dapat diperoleh bilangan real yang lain.

CP 3

Sifat lebatnya system bilangan real

Untuk setiap $x, y \in R$ dengan $x < y$, dapat diperoleh $z \in R$ sehingga $x < z < y$.

Bukti

Ambil $x_0, y_0 \in R$ dengan $x_0 < y_0$sebarang

Karena $x_0 < y_0$, maka kalau kedua ruas ditambahkan dengan x_0 diperoleh

$$2x_0 < x_0 + y_0 \qquad (*)$$

Karena $x_0 < y_0$, maka kalau kedua ruas ditambahkan dengan y_0 diperoleh

$$x_0 + y_0 < 2y_0 \qquad (**)$$

Karena (*) dan (**), diperoleh

$$2x_0 < x_0 + y_0 < 2y_0$$

Atau

$$x_0 < \frac{x_0 + y_0}{2} < y_0$$

Dengan mengambil $z_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$ diperoleh

$$x_0 < z_0 < y_0$$

Karena $x_0, y_0 \in R$ dengan $x_0 < y_0$sebarang, maka terbukti bahwa untuk setiap $x, y \in R$ dengan $x < y$, dapat diperoleh $z \in R$ sehingga $x < z < y$.

Akibat

Diberikan $x \in R$ dengan $x > 0$. Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\varepsilon > x > 0$, maka $x = 0$.

Bukti

Andaikan $x \neq 0$, maka $x > 0$

Karena $x \in R$, maka berdasarkan sifat 1, terdapat $\frac{1}{2}x > 0$ sehingga $x > \frac{1}{2}x > 0$.

Jika diambil $\varepsilon = \frac{1}{2}x$ maka diperoleh $x > \varepsilon > 0$. Kontradiksi dengan yangdiketahui yaitu untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\varepsilon > x > 0$. Dengan demikian, tidak mungkin $x \neq 0$. Dengan kata lain $x = 0$.

CP 4

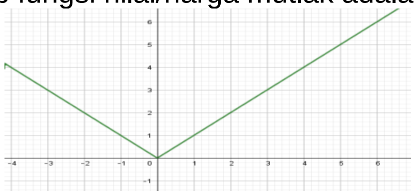
Dari sifat trikotomi system bilangan real, kita biasanya lebih suka pada system atau himpunan bilangan positif. Terdapat suatu fungsi yang membawa semua bilangan real ke system atau himpunan bilangan positif. Fungsi yang dimaksud adalah fungsi nilai/harga mutlak.

==

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

==

Visualisasi dari konsep fungsi nilai/harga mutlak adalah sebagai berikut



Beberapa sifat yang dapat diperoleh dari fungsi nilai/harga mutlak adalah sebagai berikut.

- $|x| \geq 0$
- $-|x| \leq x \leq |x|$
- $|x| \leq K \Leftrightarrow -K \leq x \leq K$
- $|x.y| = |x||y|$

CP 5

Sifat 1
Untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $|x + y| \leq |x| + |y|$

Bukti

Ambil $x_0, y_0 \in R$ sebarang.
Karena $x_0 \in R$ maka $-|x_0| \leq x_0 \leq |x_0|$
Karena $y_0 \in R$ maka $-|y_0| \leq y_0 \leq |y_0|$
Sehingga jika dijumlahkan diperoleh

$$-|x_0| - |y_0| \leq x_0 + y_0 \leq |x_0| + |y_0|$$
$$\Leftrightarrow -(|x_0| + |y_0|) \leq x_0 + y_0 \leq (|x_0| + |y_0|)$$
$$\Leftrightarrow |x_0 + y_0| \leq |x_0| + |y_0|$$

Karena $x_0, y_0 \in R$ sebarang, maka terbukti.

1.4
TOPOLOGI

Capaian pembelajaran:

1. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep persekitaran.*
2. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep titik dalam.*
3. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep titik luar.*
4. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep titik batas.*
5. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep titik limit.*
6. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep himpunan atau interval terbuka.*
7. *Mahasiswa dapat visualisasi dan memahami konsep himpunan atau interval tertutup.*
8. *Mahasiswa memahami konsep himpunan dari contoh-contoh*

CP 1

Konsep topologi dibangun untuk menjelaskan konsep-konsep himpunan. Seperti yang telah diketahui, dikenal himpunan terbuka dan himpunan tertutup pada materi-materi sebelumnya.

Mata-kuliah ini adalah analisis real. Pernahkah anda pikirkan

Himpunan bilangan real, termasuk himpunan terbuka ataukah tertutup?

Jika anda belum mengetahui, maka materi pada modul ini sangat penting untuk anda pelajari.

Untuk mempelajari himpunan terbuka dan tertutup, anda perlu memahami konsep persekitaran, titik dalam, dan titik limit.

Persekitaran

Konsep perkitaran dapat dibangun dari konsep persekitaran dalam kehidupan nyata. Ketika kita membicarakan sekitar rumah kita, kita cenderung menceritakan rumah-rumah, atau objek-objek yang dekat dengan rumah kita. Setiap kita akan menceritakan dengan jarak yang berbeda, namun dapat dipastikan bahwa jarak yang diceritakan relative dekat atau pendek dari rumah kita.

Konsep jarak mempunyai sifat bahwa jarak selalu positif, sehingga konsep persekitaran adalah sebagai berikut.

$$N_\varepsilon(a) = \{x | a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

Dengan kata lain,

$$N_\varepsilon(a) = \{x || a - x| < \varepsilon\}$$

Dengan karta lain

$$N_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Contoh – contoh

- $N_{\frac{1}{2}}(0) = \left(0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- $N_{\frac{1}{2}}(-1) = \left(-1 - \frac{1}{2}, -1 + \frac{1}{2}\right) = \left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
- $N_{\frac{1}{3}}(1) = \left(1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, 1\frac{1}{3}\right)$

CP 2

Titik dalam

Untuk memahami konsep titik dalam, jawablah beberapa pertanyaan ringan berikut ini.

- Mengapa Anda disebut di dalam ruang kuliah?
- Mengapa dia di luar ruang kuliah?

Konsep titik dalam adalah sebagai berikut

Titik $a \in I$ dikatakan titik dalam $I \subseteq R$ jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga

$$N_\varepsilon(a) \subseteq I$$

Contoh pada interval [0, 5] = $\{x|0 \leq x \leq 5\}$

- Titik 1 merupakan titik dalam [0, 5] karena terdapat $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ sehingga $N_{\frac{1}{2}}(1) = \left(\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right) \subseteq [0, 5]$
- Titik 2 merupakan titik dalam [0, 5] karena terdapat $\varepsilon = 1 > 0$ sehingga $N_1(2) = (1,3) \subseteq [0, 5]$
- Titik 3 merupakan titik dalam [0, 5] karena terdapat $\varepsilon = 2 > 0$ sehingga $N_2(3) = (1,5) \subseteq [0, 5]$
- Titik 0 bukan titik dalam [0, 5] karena tidak ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(0) \subseteq [0, 5]$. Berapa pun kita menentukan $\varepsilon > 0$ pasti $N_\varepsilon(0) \nsubseteq [0, 5]$.
- Titik 5 bukan titik dalam [0, 5] karena tidak ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(5) \subseteq [0, 5]$. Berapa pun kita menentukan $\varepsilon > 0$ pasti $N_\varepsilon(5) \nsubseteq [0, 5]$.

CP 3

Titik luar

Setelah memahami konsep titik dalam, berikutnya akan mudah bagi anda untuk mempelajari konsep titik luar.

Titik $b \in R$ dikatakan titik luar $I \subseteq R$ jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga

$$N_\varepsilon(b) \subseteq I^c$$

Contoh pada interval [0, 5] = $\{x|0 \leq x \leq 5\}$

- Titik -1 merupakan titik luar [0, 5] karena terdapat $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ sehingga $N_{\frac{1}{2}}(-1) = \left(-1\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \subseteq [0, 5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$

- Titik 6 merupakan titik luar [0, 5] karena terdapat $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ sehingga $N_{\frac{1}{2}}(6) = \left(5\frac{1}{2}, 6\frac{1}{2}\right) \subseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
- Titik 1 bukan titik luar [0, 5] karena tidak ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(1) \nsubseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
- Titik 3 bukan titik luar [0, 5] karena tidak ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(3) \nsubseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$
- Titik 0 bukan titik luar [0, 5] karena tidak ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(0) \subseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$. Berapa pun kita menentukan $\varepsilon > 0$ pasti $N_\varepsilon(0) \nsubseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$.
- Titik 5 bukan titik luar [0, 5] karena tidak ada $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(5) \subseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$. Berapa pun kita menentukan $\varepsilon > 0$ pasti $N_\varepsilon(5) \nsubseteq [0,5]^c = (-\infty, 0) \cup (5, \infty)$].

CP 4

Titik batas

Titik $c \in R$ dikatakan titik batas $I \subseteq R$ jika $c \in R$ bukan titik dalam dan bukan pula titik luar $I \in R$

Contoh pada interval [0, 5] = $\{x|0 \leq x \leq 5\}$

- Titik 0 merupakan titik batas [0, 5] karena 0 bukan titik dalam dan juga bukan titik luar [0, 5].
- Titik 5 merupakan titik batas [0, 5] karena 5 bukan titik dalam dan juga bukan titik luar [0, 5].
    - Titik 3 bukan titik batas interval [0, 5] karena 3 merupakan titik dalam [0, 5].
    - Titik 1 bukan titik batas interval [0, 5] karena 1 merupakan titik dalam [0, 5].
    - Titik -1 bukan titik batas interval [0, 5] karena -1 merupakan titik luar [0, 5].
    - Titik 6 bukan titik batas interval [0, 5] karena 6 merupakan titik luar [0, 5].

CP 5

Titik limit

Titik $d \in I$ dikatakan titik limit $I \subseteq R$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku

$$N_\varepsilon(d) \cap I - \{d\} \neq \emptyset$$

Contoh pada interval [0, 5] = $\{x|0 \leq x \leq 5\}$

- Titik 1 merupakan titik limit [0, 5] karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(1) \cap [0,5] - \{1\} \neq \emptyset$
- Titik 2 merupakan titik limit [0, 5] karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(2) \cap [0,5] - \{2\} \neq \emptyset$

- Titik 0 merupakan titik limit [0, 5] karena karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(0) \cap [0,5] - \{0\} \neq \emptyset$
- Titik 5 merupakan titik limit [0, 5] karena karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(5) \cap [0,5] - \{5\} \neq \emptyset$
- Titik -3 bukan titik limit [0, 5] karena ada $\varepsilon = 1 > 0$ sehingga $N_1(-3) \cap [0,5] - \{-3\} \neq \emptyset$

CP 6

Himpunan terbuka

Himpunan atau interval dikatakan himpunan atau interval terbuka jika semua anggotanya adalah titik dalam

Contoh himpunan terbuka

- Himpunan atau interval (-1,1) = {x|-1<x<1} merupakan himpunan atau interval terbuka karena semua anggotanya merupakan titik limit
  - Untuk setiap $x \in (-1,1)$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (-1,1)$
- Himpunan atau interval (0,5) = {x|0<x<5} merupakan himpunan atau interval terbuka karena semua anggotanya merupakan titik limit
  - Untuk setiap $x \in (0,5)$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (0,5)$
- Secara umum, himpunan atau interval (a,b) merupakan himpunan atau interval terbuka karena untuk setiap $x \in (a,b)$ terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $N_\varepsilon(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq (a,b)$

CP 7

Himpunan tertutup

Himpunan atau interval dikatakan himpunan atau interval tertutup jika semua anggotanya adalah titik limit.

Contoh himpunan tertutup

- Himpunan atau interval [-1,1] = {x|-1≤x≤1} merupakan himpunan atau interval tertutup karena semua anggotanya merupakan titik limit
  - Untuk setiap $x \in [-1,1]$ berlaku bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(x) \cap [-1,1] - \{x\} \neq \emptyset$
- Himpunan atau interval [0,5] = {x|0≤x≤5} merupakan himpunan atau interval tertutup karena semua anggotanya merupakan titik limit
  - Untuk setiap $x \in [0,5]$ berlaku bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(x) \cap [0,5] - \{x\} \neq \emptyset$
- Secara umum, himpunan atau interval $[a,b]$ merupakan himpunan atau interval terbuka karena untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $N_\varepsilon(x) \cap [a,b] - \{x\} \neq \emptyset$

CP 8

Contoh himpunan atau interval yang tidak terbuka sekaligus tidak tertutup

- Perhatikan himpunan atau interval [0,5).
  - Himpunan [0,5) bukan himpunan atau interval terbuka karena $0 \in [0,5)$ tetapi bukan titik dalam.
  - Himpunan [0,5) bukan himpunan atau interval tertutup karena $5 \notin [0,5)$ namun bukan titik limit.
  - Himpunan [0,5) merupakan contoh himpunan atau interval yang tidak terbuka sekaligus tidak tertutup.
- Perhatikan himpunan atau interval (0,5].
  - Himpunan (0,5] bukan himpunan atau interval terbuka karena $5 \in [0,5)$ tetapi bukan titik dalam.
  - Himpunan (0,5] bukan himpunan atau interval tertutup karena $0 \notin [0,5)$ namun bukan titik limit.
  - Himpunan (0,5] merupakan contoh himpunan atau interval yang tidak terbuka sekaligus tidak tertutup.
- Secara umum, himpunan atau interval (a,b] atau {a,b) merupakan himpunan atau interval yang tidak terbuka sekaligus tidak tertutup.

Contoh himpunan terbuka sekaligus himpunan tertutup

- Himpunan bilangan real R merupakan himpunan atau interval terbuka karena semua anggotanya adalah titik dalam
- Himpunan bilangan real R merupakan himpunan atau interval tertutup karena semua anggotanya adalah titik limit
- Himpunan bilangan real R merupakan contoh himpunan terbuka sekaligus himpunan tertutup

Contoh kasus himpunan kosong

- Himpunan kosong {} merupakan himpunan terbuka karena jika tidak terbuka maka ada anggota atau batasnya yang bukan titik dalam. Kontradiksi dengan konsep himpunan kosong {} yang seharusnya tidak mempunyai anggota dan batas. Dengan demikian, himpunan kosong {} merupakan himpunan terbuka.
- Himpunan kosong {} merupakan himpunan tertutup karena jika tidak tertutup maka ada anggota atau batasnya yang bukan titik limit. Kontradiksi dengan konsep himpunan kosong {} yang seharusnya tidak mempunyai anggota dan batas. Dengan demikian, himpunan kosong {} merupakan himpunan tertutup.
- Himpunan kosong {} merupakan himpunan yang tidak terbuka karena jika himpunan kosong himpunan terbuka maka semua anggotanya haruslah titik dalam. Kontradiksi dengan konsep himpunan kosong [] yang seharusnya tidak mempunyai anggota. Dengan demikian, himpunan kosong {} merupakan himpunan tidak terbuka.

- Himpunan kosong {} merupakan himpunan yang tidak tertutup karena jika himpunan kosong himpunan tertutup maka semua anggotanya haruslah titik limit. Kontradiksi dengan konsep himpunan kosong [] yang seharusnya tidak mempunyai anggota. Dengan demikian, himpunan kosong {} merupakan himpunan tidak tertutup.

Himpunan kosong {} adalah contoh himpunan yang terbuka sekalgus tertutup dan tidak terbuka sekaligus tidak tertutup.