ANALISIS REAL

OLEH
FATRIYA ADAMURA, M.Pd.

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-602-0725-16-1

ANALISIS REAL

ANALISIS REAL

Fatriya Adamura

`

UNIPMA Press
WE GOT IT

ANALISIS REAL

Penulis:
Fatriya Adamura

Perancang Sampul:
Fatriya Adamura

Penata Letak:
Tim Kreatif Unipma Press

Cetakan Pertama, Desember 2018

DiterbitkanOleh:
UNIPMA PRESS
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
Telp. (0351) 462986, Fax. (0351) 459400
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN: 978-602-0725-16-1

KATA PENGANTAR

Puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat dan karunia-Nya sehingga buku yang berjudul “Analisis Real” dapat terselesaikan dengan baik. Buku ini berisi tentang materi pada mata kuliah Analisis Real. Dalam buku ini akan dibahas materi pengantar dan dasar pada mata kuliah Analisis Real.

Buku ini dibuat untuk menyelesaikan problematika yang berkaitan dengan mata kuliah Analisis Real. Buku ini diharapkan dapat bermanfaat bagi pembaca.

Penyusun menyadari bahwa pembuatan buku ini tidak akan lepas dari kekurangan. Pembaca dapat memberikan kritik dan saran yang bersifat membangun untuk penyempurnaan karya selanjutnya.

Salam,

Penyusun

DAFTAR ISI

Kata Pengantar v
Daftar Isi vii
BAB I Himpunan dan Fungsi
A. Himpunan dan Fungsi 1
B. Induksi Matematika... 8
C. HimpunanTerbatas dan takTerbatas 11
BAB II Bilangan Real
A. Sifat Aljabar dan Sifat Urutan pada Himpunan Bilangan Real $\mathbb{R}$ 15
B. Nilai Mutlak dan Garis Bilangan.. 23
C. Sifat Kelengkapan pada Himpunan Bilangan Real 25
D. Aplikasi Sifat Supremum 28
E. Interval 29
BAB III Barisan dan Limit Barisan
A. Definisi Barisan 33
B. Limit Barisan.. 33
C. Barisan Monoton 39
D. Sub barisan danTeorema Bolzano - Weierstrass.............. 41
E. Kriteria Cauchy... 33
F. Barisan Divergen Sejati 44
Daftar Pustaka 46
BiografiPenulis 47

BAB 1

HIMPUNAN DAN FUNGSI

A. Himpunan dan Fungsi

- Jika elemen x ada pada himpunan A, maka bisa ditulis $x \in A$ atau bisa dibaca x anggota A.
- Jika elemen x tidak pada himpunan A, maka bisa ditulis $x \notin A$ atau bisa dibaca x bukan anggota A.
- Jika setiap elemen himpunan A termasuk pada himpunan B, maka dapat dikatakan bahwa A himpunan bagian B atau dapat disimbolkan A ⊆ B atau B ⊇ A.
- Kita mengatakan bahwa himpunan A merupakan himpunan bagian sejati dari himpunan B jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B dan paling tidak ada satu elemen B yang tidak terdapat pada himpunan A, kadang-kadang kita menuliskan sebagai $A \subset B$.

<u>Definisi</u>

Himpunan A dan B dikatakan sama dan dituliskan dengan $A = B$, jika himpunan A dan B memiliki elemen yang sama.

- Untuk membuktikan bahwa himpunan A dan B sama, maka harus ditunjukkan bahwa A ⊆ B dan B ⊆ A.
- Suatu himpunan didefinisikan dengan mendaftar anggota-anggota himpunan atau dengan menyebutkan sifat-sifat yang menunjukkan anggota-anggota himpunan.
- Simbol := sering digunakan pada penotasian himpunan. Simbol := berarti bahwa simbol di ruas kiri didefinisikan oleh simbol di ruas kanan.

- Himpunan bilangan asli disimbolkan dengan $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$.
- Himpunan bilangan bulat disimbolkan dengan $\mathbb{Z} := \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3 \dots\}$.
- Himpunan bilangan rasional disimbolkan dengan $\mathbb{Q} := \left\{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}} : \mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{Z} \text{ dan n } \neq 0\right\}$.
- Himpunan bilangan real disimbolkan dengan $\mathbb{R}$.

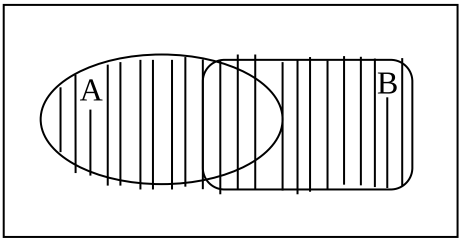
Contoh:

- Himpunan $\{x \in \mathbb{N}: x^2 - 3x + 2 = 0\}$ memuat bilangan asli yang memenuhi persamaan kuadrat. Karena solusi persamaan kuadrat tersebut hanya $x = 1$ dan $x = 2$, maka kita bisa mendenotasikan himpunan di atas secara lebih sederhana dengan $\{1, 2\}$.
- Suatu bilangan asli n merupakan bilangan genap jika berbentuk $n = 2k$; $k \in \mathbb{N}$. Himpunan bilangan asli genap dapat dituliskan dengan $\{2k : k \in \mathbb{N}\}$ atau $\{n \in \mathbb{N}: n = 2k, k \in \mathbb{N}\}$. Sedangkan himpunan bilangan asli ganjil dapat dituliskan dengan $\{2k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$.

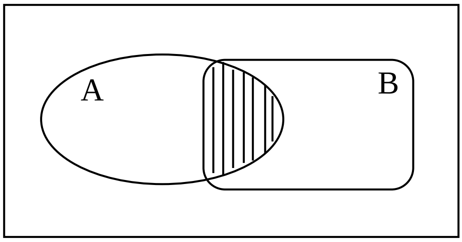
Operasi Himpunan

<u>Definisi</u>

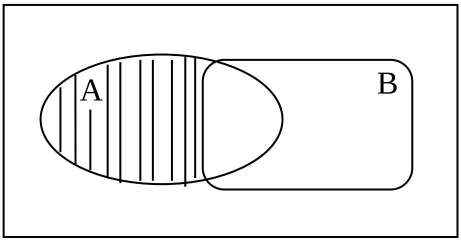
- Gabungan (union) himpunan A dan B adalah himpunan $A \cup B := \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
- Irisan himpunan A dan B adalah himpunan $A \cap B := \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
- Komplemen himpunan B relativ ke himpunan A adalah himpunan $A \setminus B := \{x : x \in A \text{ dan } x \notin B\}$.



A ∪ B



A ∩ B



A \B

Teorema

Jika A, B, C merupakan himpunan, maka

a. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

b. $A \setminus (B \ \cap \ C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Bukti:

Akan dibuktikan $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Untuk membuktikan $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, maka harus ditunjukkan bahwa $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ dan $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$.

($\rightarrow$) Akan ditunjukkan $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Ambil sebarang $x \in A \setminus (B \cup C)$

Jika $x \in A \setminus (B \cup C)$, maka x di A, tetapi x tidak di $B \cup C$ atau x di A, tetapi x tidak di B maupun C.

Sehingga, x di A, tetapi tidak di B dan x di A, tetapi tidak di C atau $x \in A \setminus B$ dan $x \in A \setminus C$. Hal ini menunjukkan bahwa $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$... (*)

($\rightarrow$) Akan ditujukkan $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$

Ambil sebarang $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Jika $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, maka $x \in A \setminus B$ dan $x \in A \setminus C$.

Sehingga, $x \in A$, tetapi $x \notin B$ dan $x \notin C$ atau $x \in A$ dan $x \notin B \cup C$.

Hal ini menunjukkan bahwa $x \in A \setminus (B \cup C)$

$(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \subseteq A \setminus (B \cup C)$... (**)

Berdasarkan (*) dan (**), maka $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

Hasil Kali Cartesian

Definisi

Jika himpunan A dan B bukan himpunan kosong, maka hasil kali Cartesian $A \times B$ dari himpunan A dan B adalah himpunan pasangan terurut (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$ atau dapat disimbolkan dengan $A \times B := \{(a, b): a \in A, b \in B\}$.

Contoh:

Jika $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{1, 5\}$, maka himpunan $A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (2, 1), (2, 5), (3, 1), (3, 5)\}$.

Definisi

Fungsi f dari himpunan A ke himpunan B adalah aturan korespondensi yang memasangkan setiap x anggota himpunan A dengan tepat satu $f(x)$ anggota himpunan B.

- Misalkan A dan B suatu himpunan, maka fungsi dari himpunan A ke himpunan B adalah himpunan f dari pasangan terurut di $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ sedemikian sehingga untuk setiap $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ ada tepat satu $\mathrm{b} \in \mathrm{B}$ dengan $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{f}$. (Dengan kata lain, jika $(\mathrm{a}, \mathrm{b}) \in \mathrm{f}$ dan $(\mathrm{a}, \mathrm{b}') \in \mathrm{f}$, maka $\mathrm{b} = \mathrm{b}'$)
- Himpunan A yang merupakan elemen pertama dari fungsi f disebut sebagai domain f dan dinotasikan dengan $D(f)$. Himpunan semua elemen kedua dari fungsi f disebut sebagai range f dan dinotasikan dengan $R(f)$.

Catatan: Meskipun $D(f) = A$, tetapi $R(f) \subseteq B$.

Notasi $f: A \to B$ sering digunakan untuk mengindikasikan bahwa fungsi f merupakan fungsi dari A ke B atau fungsi f memetakan A ke B.

Jika (a, b) adalah anggota f, maka dapat dituliskan bahwa $b = f(a)$ atau dapat dikatakan bahwa b adalah nilai f di a.

.

Peta dan Invers

Definisi

Misal $f: A \to B$ merupakan fungsi dengan domain $D(f) = A$ dan range $R(f) \subseteq B$.

Jika E adalah himpunan bagian dari himpunan A, maka peta E di bawah fungsi f adalah $f(E) \subseteq B$ dengan $f(E) := \{f(x): x \in E\}$.

- Jika himpunan $H \subseteq B$, maka invers H di bawah fungsi f adalah $f^{-1}(H) \subseteq A$ yang diberikan oleh $f^{-1}(H) := \{x \in A: f(x) \in H\}$.
- Jika $E \subseteq A$, maka sebuah titik $y_1 \in B$ adalah peta dari $f(E)$ jika dan hanya jika paling tidak ada satu titik $x_1 \in E$ sedemikian sehingga $y_1 = f(x_1)$.

- Jika $H \subseteq B$, maka sebuah titik $x_2 \in f^{-1}(H)$ adalah invers di $f^{-1}(H)$ jika dan hanya jika $y_2 = f(x_2)$ elemen H.

Contoh:

Misalkan $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ didefinisikan dengan $f(x) = x^2$, maka peta dari himpunan $E \coloneqq \{x: 0 \leq x \leq 2\}$ adalah himpunan $f(E) \coloneqq \{y: 0 \leq y \leq 4\}$. Jika $G \coloneqq \{y: 0 \leq y \leq 4\}$, maka invers dari himpunan G adalah himpunan $f^{-1}(G) = \{x: -2 \leq x \leq 2\}$, sehingga $f^{-1}\big(f(E)\big) \neq E$. Dengan kata lain, $f\big(f^{-1}(G)\big) = G$. Tetapi, jika $H \coloneqq \{y: -1 \leq y \leq 1\}$, maka kita punya $f\big(f^{-1}(H)\big) = \{y: 0 \leq y \leq 1\} \neq H$.

Jenis-jenis Fungsi

Definisi

Misal $f: A \to B$ merupakan fungsi dari himpunan A ke himpunan B.

- Fungsi f dikatakan injektif (fungsi satu-satu) jika $x_1 \neq x_2$, maka $f(x_1) \neq f(x_2)$. Jika fungsi f merupakan fungsi injektif, maka fungsi f dikatakan sebagai suatu injeksi.

  Untuk membuktikan bahwa fungsi f merupakan fungsi injektif, maka harus dibuktikan bahwa untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ berlaku jika $f(x_1) = f(x_2)$, maka $x_1 = x_2$.
- Fungsi f dikatakan surjektif (pemetaan A onto B) jika $f(A) = B$ yaitu jika $R(f) = B$. Jika fungsi f merupakan fungsi surjektif, maka fungsi f dikatakan sebagai suatu surjeksi.

Untuk membuktikan bahwa fungsi f merupakan fungsi surjektif, maka harus dibuktikan bahwa untuk setiap $b \in B$ maka paling tidak ada $x \in A$, sedemikian sehingga $f(x) = b$.

- Jika fungsi f injektif dan surjektif, maka fungsi f dikatakan bijektif. Jika fungsi f merupakan fungsi bijektif, maka fungsi f dikatakan sebagai suatu bijeksi.

Fungsi Invers

Definisi

Misal $f: A \rightarrow B$ merupakan bijeksi dari himpunan A onto B, maka $g:= \{(b, a) \in B \times A : (a, b) \in f\}$ adalah suatu fungsi B into A. Fungsi ini disebut sebagai fungsi invers dari fungsi f dan dinotasikan dengan f^{-1}. Fungsi f^{-1} disebut sebagai invers dari fungsi f.

Hubungan antara fungsi f dengan f^{-1} adalah $D(f) = R(f^{-1})$ dan $R(f) = D(f^{-1})$.

Komposisi Fungsi

Definisi

Jika $f: A \rightarrow B$ dan $g: B \rightarrow C$ dan jika $R(f) \subseteq D(g) = B$, maka fungsi komposisi $g \circ f$ adalah fungsi dari A into C yang didefinisikan dengan $(g \circ f)(x) \coloneqq g\big(f(x)\big)$ untuk setiap $x \in A$.

Contoh:

Misalkan fungsi f dan g merupakan fungsi yang memiliki nilai di $x \in \mathbb{R}$ yang diberikan oleh $f(x) := 2x$ dan $g(x) := 3x^2 - 1$.

Karena $D(g) = R$ dan $R(f) \subseteq \mathbb{R} = D(g)$, maka domain $D(g \circ f) = \mathbb{R}$. dan fungsi komposisi $g \circ f$ diberikan oleh $(g \circ f)(x) = 3(2x\,)^2 - 1 = 12x^2 - 1$.

Domain komposisi fungsi $f \circ g$ juga $\mathbb{R}$ dan $(f \circ g)(x) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2$.

Jadi, dalam hal ini didapat kesimpulan bahwa $g \circ f \neq f \circ g$.

B. Induksi Matematika

1.2.1 Sifat Urutan Baik dari $\mathbb{N}$

Setiap himpunan bagian tak kosong dari $\mathbb{N}$ memiliki paling tidak satu elemen terkecil.

Pernyataan yang lebih detil dari sifat ini adalah jika S himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ dan jika $S \neq \emptyset$, maka paling tidak ada $m \in S$ sedemikian sehingga $m \leq k$ untuk semua $k \in S$.

1.2.2 Prinsip Induksi Matematika

Misalkan himpunan S merupakan himpunan bagian dari $\mathbb{N}$ yang memenuhi dua sifat, yaitu:

1. Bilangan $1 \in S$
2. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $k \in S$, maka $k + 1 \in S$

maka $S = \mathbb{N}$

Bukti:

Diketahui:

- $S \subseteq \mathbb{N}$
- $1 \in S$

- Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $k \in S$, maka $k + 1 \in S$

Akan dibuktikan: $S = \mathbb{N}$?

Bukti:

- Andaikan $S \neq \mathbb{N}$, maka himpunan $\mathbb{N} \setminus S$ bukan himpunan kosong, sehingga dengan sifat urutan baik diketahui bahwa $\mathbb{N} \setminus S$ mempunyai elemen terkecil m.
- Karena $1 \in S$, maka $m > 1$.
- Tetapi $m - 1 \in \mathbb{N}$.
- Karena $m - 1 < m$, dan m merupakan elemen terkecil di $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga $m \notin S$, maka $m - 1 \in S$.
- Karena $k \coloneqq m - 1 \in S$, maka $k + 1 = (m - 1) + 1 = m \in S$.
- Pernyataan $m \in S$ kontradiksi dengan yang diketahui bahwa $m \notin S$. Hal ini berarti bahwa pengandaian salah, yang benar $S = \mathbb{N}$.

Prinsip induksi matematika dapat diformulasikan sebagai berikut.

Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, misalkan $P(n)$ merupakan pernyataan dalam n, maka berlaku pernyataan berikut: Jika

1. $P(1)$ benar
2. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $P(k)$ benar, maka $P(k + 1)$ benar.

   Maka $P(n)$ juga benar untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Prinsip Induksi Matematika (versi kedua)

Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan $P(n)$ merupakan pernyataan yang berlaku untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$. Misalkan bahwa jika:

1. Pernyataan $P(n_0)$ benar
2. Untuk setiap $k \geq n_0$, kebenaran pernyataan $P(k)$ mengimplikasikan kebenaran pernyataan $P(k + 1)$.

Maka $P(\mathrm{n})$ benar untuk semua $\mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0$.

Contoh:

Buktikan bahwa pernyataan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ berlaku untuk setiap $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$!

Jawab:

1. Akan dibuktikan pernyataan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ benar untuk $\mathrm{n} = 1$

   $1 = \frac{1}{2}.1.(1+1)$

   $1 = \frac{1}{2}.1.(2)$

   $1 = 1$

   Pernyataan di atas berlaku untuk $\mathrm{n} = 1$.

2. Diasumsikan pernyataan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ benar untuk $\mathrm{n} = \mathrm{k}$, akan dibuktikan bahwa pernyataan di atas berlaku untuk $\mathrm{n} = \mathrm{k} + 1$

   Diasumsikan pernyataan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ benar untuk $\mathrm{n} = \mathrm{k}$, maka berlaku

   $1 + 2 + \cdots + k = \frac{1}{2}k(k+1)$

   Kedua ruas ditambah dengan $k + 1$

   $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k(k+1) + (k+1)$

   $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + (k+1)$

   $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$

   $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$

   $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + 1$

$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$

Pernyataan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ berlaku untuk $n = k + 1$

Berdasarkan pernyataan 1 dan 2, maka dapat disimpulkan bahwa pernyataan $1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ berlaku untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

1.2.5 Prinsip Induksi Matematika Kuat

Misalkan himpunan S merupakan himpunan bagian dari himpunan $\mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika:

1. $1 \in S$
2. Untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, jika $\{1, 2, \ldots, k\} \subseteq S$, maka $k + 1 \in S$

   Maka berlaku $S = \mathbb{N}$.

   Contoh :

   Buktikan bahwa $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$!

C. Himpunan Terbatas dan tak Terbatas

Definisi 1.3.1

a. Himpunan kosong $\emptyset$ memiliki 0 elemen.
b. Jika $n \in \mathbb{N}$, suatu himpunan S dikatakan memiliki n elemen jika ada bijeksi dari himpunan $\mathbb{N}_n \coloneqq \{1, 2, \ldots, n\}$ onto S.
c. Suatu himpunan S dikatakan terbatas jika himpunan S merupakan himpunan kosong atau memiliki n elemen dengan $n \in \mathbb{N}$.
d. Suatu himpunan S dikatakan himpunan tak terbatas jika himpunan tersebut tidak terbatas.