PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DAN APLIKASINYA

Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya menjelaskan tentang konsep persamaan yang terdiri dari fungsi yang tidak diketahui beserta derivative-derivatifnya. Persamaan diferensial yang dibahas terdiri dari persamaan diferensial biasa orde satu (persamaan diferensial biasa terpisah, homogen, eksak, linier, bentuk khusus) dan persamaan diferensial biasa orde dua (persamaan diferensial biasa orde dua homogen dan non homogen) serta metode-metode penyelesaian baik secara analitis maupun dengan menggunakan software Maple. Selain itu juga membahas aplikasinya pada permasalahan sehari-hari.

UNIPMA Press

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: www.kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-602-0725-06-2

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DAN APLIKASINYA

Wasilatul Murtafi'ah
Davi Apriandi

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x - 5y + \frac{dy}{dx}$$

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y' = f(x, y)$$

UNIPMA Press

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA
DAN APLIKASINYA

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DAN APLIKASINYA

Wasilatul Murtafi'ah
Davi Apriandi

UNIPMA Press
WE GOT IT

PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DAN APLIKASINYA

Penulis:
Wasilatul Murtafi'ah
Davi Apriandi

Editor:
Tim Kreatif UNIPMA Press

Perancang Sampul:
Suyadi

Penata Letak:
Tim Kreatif UNIPMA Press

Cetakan Pertama, Oktober 2018

Diterbitkan Oleh:
UNIPMA PRESS (Anggota IKAPI)
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
Telp. (0351) 462986, Fax. (0351) 459400
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN: 978-602-0725-06-2

KATA PENGANTAR

Buku Persamaan Diferensial Biasa dan Aplikasinya ini kami susun dengan tujuan untuk dapat membantu para mahasiswa yang sedang menempuh perkuliahan Persamaan Diferensial Biasa. Mengingat mata kuliah tersebut seringkali dianggap suatu hal yang sulit di kalangan mahasiswa karena harus menguasai materi prasyarat yaitu Kalkulus Diferensial dan Kalkulus Integral yang bersifat abstrak.

Salah satu upaya untuk membuat mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa lebih mudah dipahami di kalangan mahasiswa adalah dengan susunan materi yang mudah dipahami dan disertai contoh soal dan soal latihan. Selain itu juga perlu disajikannya beberapa metode penyelesaian baik secara analitik maupun dengan menggunakan *software* Maple.

Dengan dasar itulah, mengapa buku ini penulis buat. Penulis berharap buku ini dapat bermanfaat khususnya bagi mahasiswa serta pengembangan di bidang pendidikan matematika maupun bidang ilmu lain yang relevan.

Madiun, Oktober 2018

Penulis

DAFTAR ISI

TINJAUAN MATAKULIAH
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

1. **Diskripsi singkat (abstraksi) mata kuliah secara keseluruhan**
   Mata kuliah Persamaan Diferensial Biasa membahas tentang konsep persamaan yang terdiri dari fungsi yang tak diketahui beserta derivative-derivatifnya. Persamaan diferensial yang dibahas pada matakuliah ini terdiri dari persamaan diferensial biasa orde 1 (persamaan diferensial biasa terpisah, homogen, eksak, linier, bentuk khusus) dan persamaan diferensial biasa orde 2 (persamaan diferensial biasa orde 2 homogen & non homogen), serta metode-metode penyelesaiannya baik secara analitis maupun dengan menggunakan *software* Maple. Selain itu juga membahas aplikasinya pada permasalahan.

2. **Manfaat matakuliah bagi mahasiswa (berkaitan dengan profesi kerja, matakuliah selanjutnya, praktikum, dll).**
   - Membantu mahasiswa menyelesaikan permasalahan-permasalahan dalam bentuk persamaan diferensial baik menggunakan penyelesaian secara analitis maupun dengan *software* matematika (MAPLE).
   - Membekali mahasiswa untuk menjadi guru matematika.

- Menambah referensi mahasiswa untuk mengambil studi lanjut, baik dalam disiplin ilmu matematika maupun disiplin ilmu lain.

3. Capaian Pembelajaran

Mahasiswa mampu memahami konsep dan menyelesaikan persamaan diferensial (persamaan diferensial biasa orde 1 & 2) secara analitis maupun menggunakan *software* Maple serta mengaplikasikan, menganalisis & membuat desain permasalahannya secara kreatif dan ilmiah.

BAB I
PENDAHULUAN

Kemampuan Akhir yang direncanakan:

1. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep persamaan diferensial

Indikator:

1.1 Menjelaskan definisi persamaan diferensial

1.2 Mengidentifikasi orde dan derajat dari suatu persamaan diferensial

1.3 Mengenal jenis-jenis persamaan diferensial

1.4 Menyelesaikan masalah nilai awal

Gambaran Umum Materi

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui, dengan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut. Persamaan dieferensial terdiri dari persamaan diferensial biasa dan parsial serta penyelesaian umum dan khusus dari persamaan diferensial biasa.

Relavansi terhadap Pengetahuan Mahasiswa, Bidang Kerja, dll.

Materi ini merupakan materi pendahuluan dari persamaan diferensial yang sangat berguna untuk mempelajari materi pada Bab berikutnya.Materi ini juga merupakan materi prasyarat bagi matakuliah selanjutnya yaitu nilai awal dan syarat batas serta menjadi bekal mahasiswa sebagai calon guru matematika.

1.1 Pengertian Persamaan Diferensial

Persamaan Diferensial(PD)adalah persamaan yang menyatakan hubungan antara suatu fungsi yang tidak diketahui, dengan satu atau lebih turunan dari fungsi tersebut.

Contoh: $\frac{dy}{dx} = 5$ *turunan y terhadap x*

$$y - x^2 + \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x - 5y + \frac{dy}{dx}$$

Bentuk Persamaan Diferensial (PD) adalah sebagai berikut.

$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'' \dots, y^{(n-1)}\right)$ atau

$$F\left(x, y, y', y'' \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

Misalnya: $y'' = f(x, y, y'), y' = f(x, y)$

1.2 Klasifikasi PersamaanDiferensial

Persamaan Diferensial (PD) dibagi menjadi 2 yaitu:

1. **Persamaan Diferensial Biasa (PDB)**adalah suatu persamaan diferensial jika fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu peubah bebas/hanya melibatkan satu variabel bebas.

2. **Persamaan Diferensial Parsial (PDP)** adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan dua/lebih peubah/variabel bebas dan memuat turunan parsial dari fungsi yang tak diketahui.

Pada buku ini hanya dibahas persamaan diferensial biasa (PDB), sehingga bahasan materi pada Bab berikutnya terfokus pada persamaan diferensial biasa.

Di dalam persamaan diferensial terdapat beberapa istilah diantaranya:

Orde :turuanan tertinggi dalam sebuah persamaan diferensial

Derajat : pangkat dari turunan tertinggi dalam sebuah persamaan diferensial

Contoh:$5x + y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 9$→ Persamaan Diferensial Biasa orde 1 derajat 2

$\frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = \sin x$→ Persamaan Diferensial Biasa orde 3 derajat 1

$\boldsymbol{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$→ Persamaan Diferensial Parsial orde 2 derajat 1

1.3 Penyelesaian Persamaan Diferensial

Penyelesaian PDB $F\left(x, y, y', y'' \dots, y^{(n)}\right) = 0$ adalah sebuah fungsi $y(x)$ (dengan turunan-turunanya sampai orde-n yang kontinu pada selang I $\{x|a < x < b\}$) yang apabila disubstitusikan ke PDB tersebut diperoleh identitas persamaan.

Grafik $y(x)$ pada bidang $x - y$ disebut kurva penyelesaian

Penyelesaian dari PD:

1) Penyelesaian Umum PDB orde-n di selang I jika:
   a) Penyelesaian tersebut memenuhi PD yang diberikan
   b) Penyelesaian tersebut memenuhi n konstanta sebarang $C_1, C_2, \ldots C_n$.
2) Penyelesaian Khusus PDB orde-n di selang I jika:
   a) Penyelesaian tersebut memenuhi PD yang diberikan
   b) Penyelesaian tersebut memenuhi n konstanta tertentu $C_1 = a_1, C_2 = a_2, \ldots C_n = a_n$.

1.4 Masalah Nilai awal

Berikut merupakan bentuk umum dari persamaan diferensial dengan nilai/syarat awal.

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ → nilai awal atau syarat awal

Contoh: Selesaikan masalah nilai awal dari persamaan diferensial berikut.

$$y'' = e^{-x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$$

Penyelesaian:

Integralkan kedua ruas persamaan diferensial, diperoleh:

$\int y'' = \int e^{-x}\,dx$

$y' = -e^{-x} + C_1 \ldots (1)$

Syarat awal →$y'(0) = 2$

Substitusi syarat awal ke persamaan (1) diperoleh:$2 = -e^0 + C_1$→$C_1 = 3$

Integralkan kedua ruas persamaan (1) diperoleh:

$\int y' = \int (-e^{-x} + C_1)dx$

$y = e^{-x} + C_1 x + C_2 \ldots (2)$

Syarat awal →$y(0) = 1$

Substitusi syarat awal ke persamaan (2) diperoleh:

$1 = e^0 + C_1.0 + C_2$→$C_2 = 0$

Substitusi C_1 dan C_2 ke persamaan (2) diperoleh $y = e^{-x} + 3x$

∴Penyelesaian dari nilai awal tersebut adalah $y = e^{-x} + 3x$

Untuk pembahasan selanjutnya, dapat dibedakan antara solusi umum dan solusi khusus. Dengan menggunakan syarat awal/nilai awal maupun syarat batas maka akan diperoleh solusi khusus, artinya konstanta sembarang yang termuat dalam solusi umum akan mempunyai nilai tertentu.

1.5 Soal Latihan

Tentukan jenis, orde, dan derajat dari persamaan diferensial berikut ini.

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 5y = 0$
2. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + xy = 0$
3. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3 = 0$
4. $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + x = 0$
5. $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$

Tentukan masalah nilai awal dari persamaan diferensial berikut.

6. $y'' = e^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = 3$
7. $y'' = xe^{-3x}, y(0) = 0, y'(0) = -1$
8. $y'' = e^{-x} + x, y(0) = -2, y'(0) = 0$
9. $y'' = x^2e^{-2x}, y(0) = 1, y'(0) = 2$
10. $y'' = -x - e^{-x}, y(0) = -3, y'(0) = 1$

BAB II
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA ORDE SATU

Kemampuan Akhir yang direncanakan:

2. Mengidentifikasi dan menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde 1 terpisah
3. Mengidentifikasi dan menyelesaikan persamaan diferensial biasa homogen
4. Mengidentifikasi dan menyelesaikan persamaan diferensial biasa eksak

Indikator:

2.1 Mengidentifikasi persamaan diferensial biasa orde 1 dengan peubah terpisah

2.2 Menyelesaikan persamaan diferensial biasa orde 1 dengan peubah terpisah

3.1 Mengidentifikasi persamaan diferensial homogen

3.2 Menyelesaikan persamaan diferensial homogen

4.1 Mengidentifikasi persamaan diferensial eksak

4.2 Menyelesaikan persamaan diferensial eksak

Gambaran Umum Materi

Persamaan diferensial orde 1 yang meliputi persamaan diferensial dengan peubah terpisah dan dapat dipisah, persamaan diferensial homogen, persamaan diferensial eksak dan tak eksak serta penyelesaiannya.

Relavansi terhadap Pengetahuan Mahasiswa, Bidang Kerja, dll.

Materi persamaan diferensial orde 1 merupakan materi pengembangan dari konsep pada matakuliah kalkulus deferensial dan integral. Metode penyelesaian dari persamaan diferensial biasa orde 1 akan digunakan untuk menyelesaikan permasalahan terkait (aplikasi persamaan diferensial orde 1). Materi ini juga menjadi bekal mahasiswa sebagai calon guru matematika.

2.1 Pengantar

Suatu persamaan diferensial biasa orde 1 adalah suatu persamaan yang memuat satu variabel bebas, biasanya dinamakan x, satu variabel tak bebas, biasanya dinamakan y, dan derivative $\frac{dy}{dx}$. Suatu persamaan diferensial orde 1 derajat 1 dapat dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut.

Bentuk Umum PD Orde 1

$\frac{dy}{dx} = y' = f(x, y)$ atau

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

$$N(x, y)dy = -M(x, y)dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

$$y' = f(x, y)$$

Selanjutnya, akan dibahas beberapabentuk persamaan diferensial biasa orde 1 beserta metode penyelesaiannya.

2.2 Persamaan DiferensialPeubah Terpisah

Suatu persamaan diferensial terpisah adalah suatu persamaan diferensial biasa orde 1 yang secara aljabar dapat direduksi ke suatu bentuk diferensial baku dengan setiap suku tak nol memuat secara tepat satu variabel. Bentuk ini dibagi menjadi 2 yaitu:

- $g(x)dx + h(y)dy = 0$→Persamaan Diferensial Peubah Terpisah
- $g_1(x)h_1(y)dx + g_2(x)h_2(y)dy = 0$→ Persamaan Diferensial Peubah dapat Dipisahkan

1. **Persamaan DiferensialPeubah Terpisah**

   Bentuk: $g(x)dx + h(y)dy = 0$

   Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial adalah

$$\int g(x)dx + \int h(y)dy = c$$

   Contoh: Selesaikan persamaan diferensial$x^5 dx + (y + 2)^2 dy = 0$

   Penyelesaian:$\int x^5\, dx + \int (y + 2)^2 dy = \int 0$

$\frac{1}{6}x^6 + c_1 + \frac{1}{3}(y+2)^3 + c_2 = c_3 \rightarrow c_3 - c_1 - c_2 = 0$

$$\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{3}(y+2)^3 = c$$

$$x^6 + 2(y+2)^3 = c; \ldots\ldots\ldots 6c = c$$

Jadi penyelesaian umum persamaan diferensial:

$$x^6 + 2(y+2)^3 = c$$

2. Persamaan Diferensial Peubah Dapat Dipisahkan

Bentuk: $g_1(x)h_1(y)\,dx + g_2(x)h_2(y)\,dy = 0$

Mengubah $g_1(x)h_1(y)\,dx + g_2(x)h_2(y)\,dy = 0$ menjadi

$\frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx + \frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy = 0$

Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial:

$$\int \frac{g_1(x)}{g_2(x)}dx + \int \frac{h_2(y)}{h_1(y)}dy = \int 0 = c$$

Contoh: Selesaikan persamaan diferensial $xy\,dx + (1+x^2)dy = 0$

Penyelesaian: $\frac{xy}{y(1+x^2)}dx + \frac{(1+x^2)}{y(1+x^2)}dy = 0$

$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)} + \int \frac{dy}{y} = \int 0$

$$\int \frac{x}{(1+x^2)} \frac{d(1+x^2)}{2x} + ln\, y = c$$

$\frac{1}{2}ln(1+x^2) + ln\, y = c$

$$ln(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + ln\, y = ln\, c_1$$

$$ln(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} y = ln\, c_1$$

$$\sqrt{(1 + x^2)}\, y = c_1$$

Jadi Penyelesaian Umum Persamaan Diferensial:

$$\sqrt{(1 + x^2)}\, y = c_1$$

2.3 Persamaan Diferensial Homogen

Persamaan diferensial homogen ini berbentuk: $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ atau $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{x}{y}\right)$

Suatu fungsi *f*(*x*,*y*) dikatakan homogen berderajat *n* jika $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$

Selanjutnya pandang bentuk persamaan diferensial orde 1:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Dikatakan homogen jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ adalah fungsi homogeny dan berderajat sama.

Contoh: Tentukan apakah fungsi berikut homogen/tidak.

Jika homogen tentukan derajatnya.

a. $x^2 + 2xy$

b. $\frac{1}{x+y}$

c. $\frac{2x+y}{x^2}$