ANALISIS VEKTOR

Buku Analisis Vektor ini dapat digunakan sebagai buku penunjang dalam mempelajari tentang matematika vektor. Buku ini membahas tentang materi vektor mulai dari pengenalan vektor hingga aplikasinya dalam penyelesaian hitung matematis. Guna membantu memahami materi yang disampaikan, buku ini juga dilengkapi dengan beberapa contoh soal dan soal Latihan sebagai bahan evaluasi. Materi-materi yang didiskusikan diantaranya adalah: skalar dan vektor, perkalian vektor, diferensial dan integral vektor, vektor dalam ruang tiga dimensi, medan scalar dan medan vektor hingga teorema divergensi.

UNIPMA Press
WE GOT IT

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setia Budi No. 85 Madiun, Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-623-8095-26-1
9 786238 095261

ANALISIS VEKTOR

IHTIARI PRASTYANINGRUM UMI KHOLIFAH

UNIPMA Press
WE GOT IT

UNIPMA Press
WE GOT IT

ANALISIS VEKTOR

IHTIARI PRASTYANINGRUM
UMI KHOLIFAH

Analisis Vektor

Ihtiari Prastyaningrum
Umi Kholifah

UNIPMA Press
WE GOT IT

Program Studi Pendidikan Teknik Elektro

Analisis Vektor

Penulis:
Ihtiari Prastyaningrum
Umi Kholifah

Editor:
Nurulita Imansari

Perancang Sampul:
Rizky Dwi Wisesa

Penata Letak:
Dodik Krisdianto

Cetakan Pertama, Maret 2023
Diterbitkan Oleh:
UNIPMA Press Universitas PGRI Madiun
JI. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id
Anggota IKAPI: No. 207/Anggota Luar Biasa/JTI/2018

ISBN: 978-623-8095-26-1

Program Studi Pendidikan Teknik Elektro

PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah SWT yang telah melimpahkan berkah dan rahmatnya kepada kami, sehingga kami dapat menyelesaikan buku ajar tentang Analisis Vektor. Buku ini berisi tentang analisis vektor dimulai dari definisi vektor, persamaan vektor, hingga operator yang digunakan dalam fungsi vektor.

Buku ini yang diberi judul “Analisis Vektor” karena fokus bahasan pada buku ini mengenai vektor matematis. Buku ini merupakan buku penunjang untuk mata kuliah Matematika Teknik pada Program Studi Pendidikan Teknik Elektro Universitas PGRI Madiun. Akhir kata kami berharap semoga kehadiran buku ini dapat memberikan manfaat bagi semua pihak.

Salam,

Penyusun

DAFTAR ISI

Vektor dan Skalar

Materi Pokok
1. Vektor dan Skalar
2. Komponen Vektor
3. Operasi Dasar Aljabar vektor

URAIAN MATERI

REMEMBER THAT !!!
1. Masih ingatkah anda tentang besaran vektor ?
2. Apa beda vektor dan skalar ?
3. Apa saja yang termasuk besaran vektor dan skalar ?

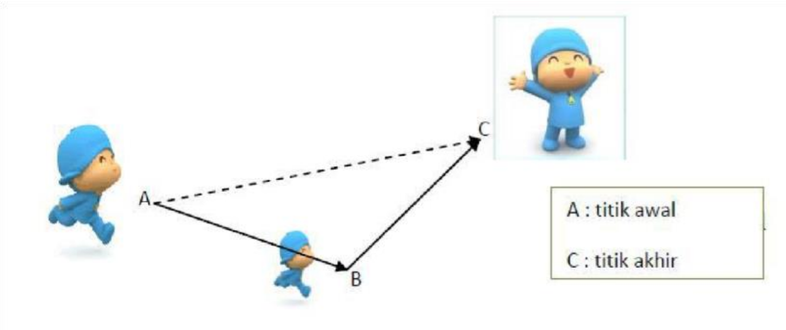
Skalar adalah sebuah besaran yang memiliki nilai namun tidak mempunyai arah. Sedangkan vektor adalah suatu besaran yang mempunyai besar dan arah. Secara grafis suatu vektor ditunjukkan sebagai potongan garis yang mempunyai arah. Besar atau kecilnya vektor ditentukan oleh panjang atau pendeknya potongan garis tersebut. Sedangkan arah vektor ditunjukkan dengan tanda anak panah.

Yang termasuk besaran skalar contohnya adalah massa, waktu, panjang, volume dan usaha, sedangkan yang termasuk besaran vektor contohnya adalah perpindahan, kecepatan, dan gaya. Selain contoh di atas, coba anda sebutkan contoh besaran skalar dan vektor yang lain !

Konsep jarak dan perpindahan

Dapatkah anda menjelaskan perbedaan jarak dan perpindahan ?

Perhatikan gambar berikut !



Gambar 1.1 Definisi jarak dan perpindahan

Apakah yang dapat Anda lihat dari gambar di atas?

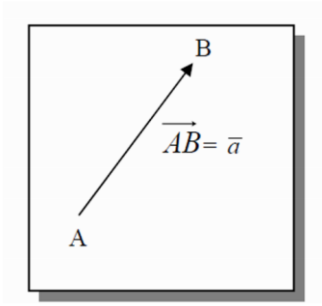
Dari gambar di atas, seorang anak berlari dengan lintasan dari titik A ke titik B, dan berakhir di titik C. Garis putus-putus yang menghubungkan titik A dan titik C merupakan perpindahan, karena terjadi perubahan posisi. Sedangkan garis yang melalui titik A ke B kemudian ke C merupakan jarak yaitu panjang lintasan yang dilalui.

Jadi, perpindahan

adalah perubahan posisi yang terjadi dalam selang waktu tertentu, sedangkan jarak merupakan panjang lintasan yang dilalui tanpa mempertimbangkan kedudukan awal dan akhir. Besar perpindahan yang dilakukan anak tersebut sama dengan panjang lintasan dari titik A ke titik C.

Secara grafik

Perhatikan gambar berikut



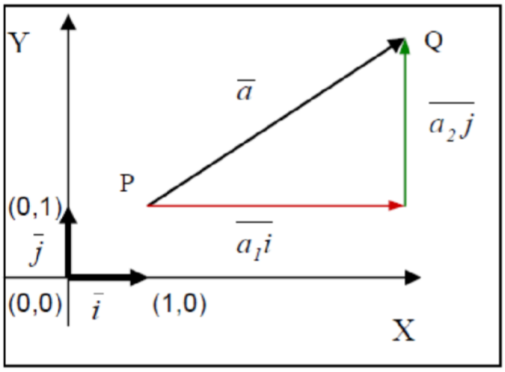
Gambar 1.2. Definisi Vektor

Secara analisis

Pada gambar tersebut vektor dapat ditulis dengan berbagai cara seperti, $\overrightarrow{AB}$, $\overline{AB}$, a , atau $\bar{a}$. Panjang vektor juga dapat ditulis dengan berbagai cara seperti $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overline{AB}|$, $|a|$, atau $|\bar{a}|$. Pada bab ini, akan disepakati bahwa simbol yang digunakan adalah $\overrightarrow{AB}$, atau a untuk menyatakan sebuah vektor, dan $|\overrightarrow{AB}|$ atau $|a|$ untuk menyatakan besaran (modulus) dari vektor tersebut.

Vektor Satuan

Perhatikan gambar berikut



Gambar 1.3. Vektor satuan

Untuk menggambarkan suatu vektor pada sistem koordinat kartesean diperlukan vektor satuan. Vektor dari titik (0,0) sampai titik (1,0) adalah vektor satuan i . Vektor dari titik

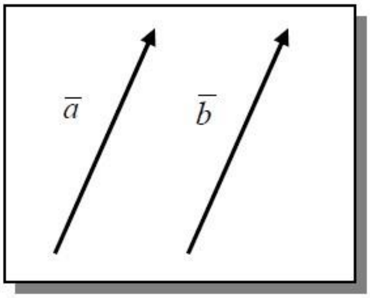
(0,0) sampai titik (0,1) adalah vektor satuan j . Arah vektor i positif sesuai dengan arah sumbu X positif. Arah vektor j positif sesuai dengan arah sumbu Y positif. Pada Gambar 1.3 vektor a dengan titik awal P dan titik akhir Q diuraikan menjadi dua vektor yaitu vektor $\overrightarrow{a_1 i}$ dan $a^{\to\to\to}{}_2{}^{\to\to}$ i. Vektor $\overrightarrow{a_1}$ dan $\overrightarrow{a_2}$ disebut komponen vektor a . Besaran $\overrightarrow{a_1}$ dan $\overrightarrow{a_2}$ disebut komponen skalar a . Secara simbolis vektor ditulis dengan a dan komponennya ditulis $\vec{a} = \overrightarrow{a_1 i} + \overrightarrow{a_2 j}$.

Aljabar Vektor

Aljabar vektor adalah operasi pada dua atau lebih dari vektor yang meliputi penambahan, pengurangan dan perkalian. Operasi vektor dapat dilakukan melalui komponen-komponen skalarnya.

1. Kesamaan dua vektor

Dua buah vektor dan dikatakan sama jika vektor-vektor tersebut memiliki besar/panjang dan arah yang sama tanpa memandang titik-titik awalnya. Jadi seperti pada gambar dibawah ini.

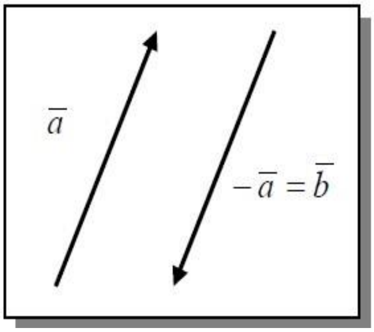


Pada gambar di samping terlihat bahwa a dan $\vec{b}$ memiliki besar/panjang yang sama dan arah yang dituju pun sama. Oleh karena itu $a = \vec{b}$, walaupun titik awal/pangkalnya berbeda

Gambar 1.4. Kesamaan dua vektor

2. Vektor Negatif

Vektor $-\bar{a}$ mempunyai ukuran sama dengan vektor $\bar{a}$ tetapi arahnya berlawanan. Jika vektor $\bar{a} = -\bar{b}$ maka $|\bar{a}| = |-\bar{b}|$. Vektor negatif sering disebut sebagai *vektor invers*.



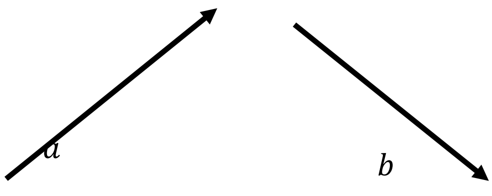
Pada gambar di samping terlihat bahwa a dan $-\vec{a}$ memiliki besar/panjang yang sama namun arah yang dituju berbeda 180º (berlawanan)

Gambar 1.5 Vektor negatif

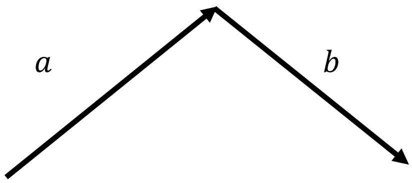
3. Jumlah atau Resultan Vektor

Jumlah atau resultan dari vektor-vektor $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ ditulis dengan $\bar{a} + \bar{b}$, adalah sebuah vektor yang dibentuk dengan menempatkan titik pangkal vektor $\bar{b}$ pada titik ujung vektor $\bar{a}$, dan kemudian menghubungkan titik pangkal vektor $\bar{a}$ dengan titik ujung vektor $\bar{b}$. Perhatikanlah contoh berikut.

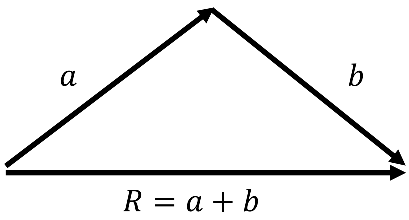
Misalkan $\bar{a}$ dan $\bar{b}$ seperti gambar berikut



Untuk mencari resultan, maka letakkan titik pangkal $\bar{b}$ pada titik ujung $\bar{a}$, sehingga diperoleh gambar berikut.



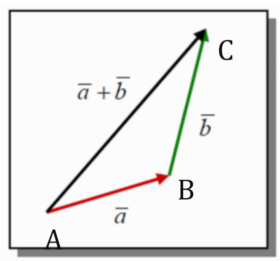
Resultan yang diperoleh adalah dengan membuat garis yang menghubungkan titik pangkal $\bar{a}$ dengan titik ujung $\bar{b}$. Jadi, resultan $\bar{a} + \bar{b}$ yang dihasilkan merupakan vektor dimana titik pangkalnya berada pada titik pangkal $\bar{a}$ dan titik ujungnya berada pada titik ujung $\bar{b}$.



Aturan yang dapat digunakan untuk menentukan resultan vektor

a. Aturan Segitiga

Perhatikan gambar disamping



Jika $\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{BC}$ mewakili $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ maka $\overrightarrow{AC}$ dikatakan penjumlahan vektor $\vec{a} + \vec{b}$. Sehingga penjelasan di atas mewakili penjelasan untuk penjumlahan dengan aturan segitiga.

b. Aturan Jajar Genjang

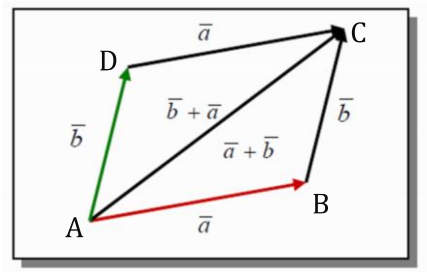
$\overrightarrow{AB}$ dan $\overrightarrow{DC}$ mewakili vektor $\vec{a}$. Sedangkan $\overrightarrow{BC}$ dan $\overrightarrow{AD}$ mewakili vektor $\vec{b}$.

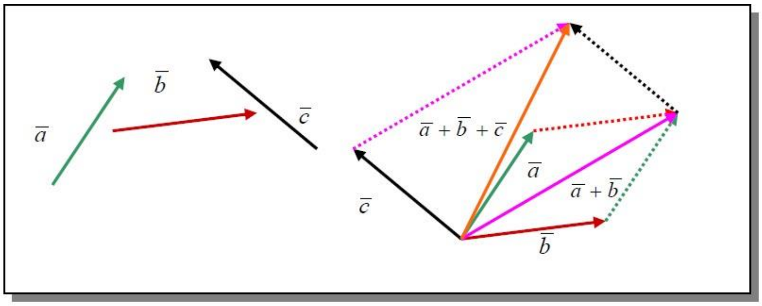
Maka $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

Atau $\overrightarrow{AC} = \vec{b} + \vec{a}$

c. Aturan Polygon

Penjumlahan tiga vektor atau lebih dapat dilakukan dengan menggunakan *aturan poligon*.



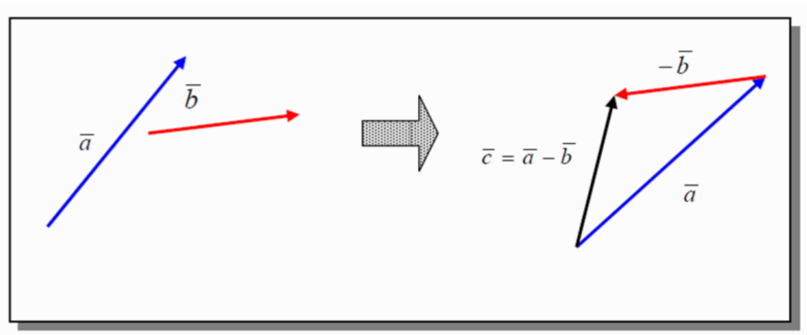


4. Selisih Dua Vektor

Selisih dua arah vektor a dan $\vec{b}$ ditunyatakan sebagai $a-\vec{b}$. Dapat diartikan sebagai penjumlahan sebuah vektor a dengan invers vektor $\vec{b}$ (vektor $-\vec{b}$). Dapat dinyatakan sebagai berikut !

Misalkan $a-\vec{b}=c$ maka $c=a+(-\vec{b})$

Secara diagram dapat dilihat seperti gambar berikut!



5. Vektor Nol

Jika vektor **a** = **b** maka **a** – **b** = **0**. **0** disebut vektor nol. Vektor nol tidak mempunyai besar dan arahnya tak tentu.

Dalam aljabar vektor, misalkan vektor $a = \vec{a}_1 \boldsymbol{i} + \vec{a}_2 \boldsymbol{j}$ dan vektor $\vec{b} = \overrightarrow{b_1 \boldsymbol{i}} + \overrightarrow{b_2 \boldsymbol{j}}$ maka berlaku aturan :

a) $a = \vec{b}$ jika dan hanya jika $\vec{a}_1 \boldsymbol{i} = \vec{b}_1 \boldsymbol{j}$ dan $\vec{a}_2 \boldsymbol{i} = \vec{b}_2 \boldsymbol{j}$

b) $m.\,a = m.\,\vec{a}_1 \boldsymbol{i} + m.\,\vec{a}_2 \boldsymbol{j}$ untuk m suatu skalar

c) $\vec{a} + \vec{b} = (\vec{a_1} + \vec{b_1})\boldsymbol{i} + (\vec{a_2} + \vec{b_2})\boldsymbol{j}$

d) $\vec{a} - \vec{b} = (\vec{a_1} - \vec{b_1})\boldsymbol{i} + (\vec{a_2} - \vec{b_2})\boldsymbol{j}$

e) $a\,.\,\vec{b} = 0$ jika $a = 0$ atau $\vec{b} = 0$ atau a tegak lurus dengan $\vec{b}$

f) $i\,.\,i = j\,.\,j = k\,.\,k = 1$ dan $i\,.\,j = 0$

g) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = (\overrightarrow{a_1 \boldsymbol{i}} + \overrightarrow{a_2 \boldsymbol{j}}).(\overrightarrow{b_1 \boldsymbol{i}} + \overrightarrow{b_2 \boldsymbol{j}}) = \vec{a_1}\,.\,\vec{b_1} + \vec{a_2}\,.\,\vec{b_2}$

h) $|\vec{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a_1}^2 + \overrightarrow{a_2}^2}$

i) $\propto = arc \tan\left(\frac{a_2}{a_1}\right)$

j) $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ cos\,\gamma$

Disamping aturan yang berlaku, sebuah aljabar vektor mempunyai sifat-sifat sebagai berikut !

Sifat-sifat aljabar vektor

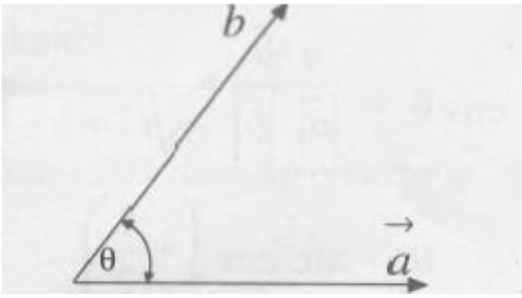
Jika **A, B** dan **C** adalah vektor-vektor dan *m* serta *n* adalah skalar skalar maka,

1. $\mathrm{A + B = B + A}$ Hukum Komutatif Penjumlahan
2. $\mathrm{A + (B + C) = (A + B) + C}$ Hukum Asosiatif Penjumlahan
3. $\mathrm{mA = Am}$ Hukum Komutatif Perkalian
4. $\mathrm{m(nA) = (mn)A}$ Hukum Asosiatif Perkalian
5. $\mathrm{(m + n)A = mA + nA}$ Hukum Distributif

6. m(A + B) = mA + mB   Hukum Distributif

Besar Sudut Antara Dua Vektor

Jika dua vektor a dan $\vec{b}$ bertemu pada satu titik, maka sudut antara dua vektor tersebut adalah sudut yang dibentuk oleh kaki vektor a dan kaki vektor $\vec{b}$. Sudut yang diambil adalah sudut terkecil.



Dari rumus

$$a.\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$
$$a.\vec{b} = |a||\vec{b}| \cos \theta$$

Diperoleh

$$\cos \theta = \frac{a.\vec{b}}{|a||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2 + b_2{}^2 + b_3{}^2}}$$

Contoh

Carilah besar sudut antara a dan $\vec{b}$, bila $a = i + j + 2\vec{k}$ dan $\vec{b} = -2i +$
$j + \vec{k}$

Penyelesaian

1. Contoh di atas memberikan informasi adanya dua vektor berarah a dan $\vec{b}$ yang memiliki satuan-satuan $a = i + j + 2\vec{k}$ dan $\vec{b} = -2i + j + \vec{k}$
2. Kedua vektor di atas akan diolah untuk memperoleh besar sudut antara a dan $\vec{b}$.
3. Untuk memperoleh besar sudut a dan $\vec{b}$, maka digunakan rumus perkalian skalar antara a dan $\vec{b}$, sehingga,
$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|cos\ \theta$$
$$cos\ \theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
4. Dari langkah 1 diperoleh vektor satuan dari vektor a dan $\vec{b}$ yaitu,
$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix};\ \vec{b} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$$
5. Oprasi *dot product*
$$\vec{a}.\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix} = -2 + 1 - 2 = -3$$
$$cos\ \theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{-3}{\sqrt{(1+1+4)(4+1+1)}} = \frac{-3}{\sqrt{36}}$$

Karena $\sqrt{36}$ mempunyai dua nilai yaitu -6 dan 6,

maka hasilnya $\begin{cases} \boxed{\dfrac{-3}{\sqrt{36}} = \dfrac{-1}{2}} \\ \boxed{\dfrac{3}{\sqrt{36}} = \dfrac{1}{2}} \end{cases}$

Sehingga kita peroleh

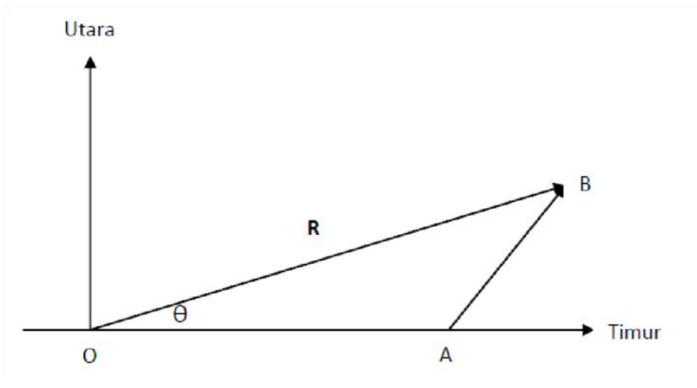
$$\theta = arc\ cos\ \left(\frac{1}{2}\right) = 60^2 \text{ dan } \theta = arc\ cos\ \left(-\frac{1}{2}\right) = 120^2$$

Contoh Soal

1. Sebuah bus bergerak sejauh 50 km menuju arah timur, kemudian dilanjutkan sejauh 25 km menuju timur laut.
   a. Gambarkanlah dengan grafik perpindahan yang dilakukan bus tersebut. Gunakan skala 1 cm mewakili 10 km.
   b. Jika **R** adalah resultan dari perpindahan yang dilakukan bus tersebut, hitung panjang dan arah dari **R** dengan menggunakan grafik dan secara analitik.

Penyelesaian

a. Untuk menggambar grafik perpindahan yang dilakukan bus, pertama-tama buat sumbu koordinat dan namai masing-masing sesuai dengan arah mata angin. Gunakan skala 1:100.000, artinya untuk 1 cm mewakili 1 km. Kemudian, gambar perpindahan sejauh 50 km ke arah timur dengan membuat garis (**OA**) sepanjang 5 cm ke arah timur. Perpindahan 25 km kerah timur laut digambar dengan membuat garis (**AB**) sepanjang 2,5 cm ke arah timur laut. Lalu, hubungkan titik awal ke titik akhir setelah perpindahan, garis ini dinamakan resultan perpindahan (**BO** = **R**). Sehingga diperoleh gambar berikut ini.



b. Secara grafik:

Besar resultan perpindahan dapat ditentukan dengan mengukur panjang **R**, panjang **R** setelah diukur ternyata 7 cm. Ini berarti |**R**| = 7 x 10 km = 70 km. Arah **R** ditentukan dengan menggunakan busur derajat, setelah diukur diperoleh arah **R** = 14^o ke sebelah utara dari timur.

Secara analitik:

Untuk menghitung panjang **R** secara analitik gunakan rumus menghitung panjang sisi sebuah segitiga berkenaan dengan dalil kosinus, yaitu:

$|\mathbf{R}|^2 = |\mathbf{OA}|^2 + |\mathbf{AB}|^2 - 2|\mathbf{OA}|\,|\mathbf{AB}| \cos 135^o$

$= 2500 + 625 - 2500 \cos$

$= 4892{,}7670$

$|\mathbf{R}| = 69{,}9483$

Selanjutnya menghitung arah **R**, gunakan dalil sinus. Misalkan θ = ∠AOB yang merupakan arah **R**

$$\frac{|\mathbf{R}|}{sin\ 135} = \frac{|\mathbf{AB}|}{sin\ \theta}$$

$$sin\ \theta = \frac{|\mathbf{AB}|}{|\mathbf{R}|} \times sin\ 135^O = \frac{25}{69{,}9483} \times \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}2572$$

Akibatnya $\theta = 14{,}6388^o$ dengan arah ke sebelah utara dari timur

Evaluasi

---

1. Gambarlah vektor-vektor dibawah ini pada koordinat kartesian

   a) $a = 4i + 5j$ b) $\vec{b} = -4i + 5j$ c) $c = -4i - 5j$ d) $d = 4i - 5j$

2. Gambarlah dan tuliskan dalam bentuk vektor *ai* +*bj* yang memiliki ketentuan sebagai berikut :

   a) Dari titik sumbu (0,0) ke titik (2;-3)

   b) Dari titik (2,3) ke titik (4,2)

c) Mempunyai besar 6 dengan arah 150º

3. Diketahui vektor $\vec{a} = 1{,}5\, i + \sqrt{3} j$ dan vektor $\vec{b} = \sqrt{2} - 5j$
   Hitunglah: a. $\bar{a} + \bar{b}$ b. $\bar{a} - \bar{b}$ c. $\bar{a}.\bar{b}$
4. Vektor $\bar{a} = 3i + 4j$, vektor $\bar{b} = 2i + 5j$ dan vektor $\bar{c} = -5i + 3j$
   Hitunglah: a. $\bar{a} + \bar{b}$ b. $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ c. $\bar{a}.\bar{b}.\bar{c}$
5. Hitunglah kerja yang dilakukan vektor *6i + 8j* pada vektor *2i + 3j* !
6. Tentukan besarnya sudut pada vektor-vektor *i + j; 2i - 3j* dan *5j* !
7. Vektor $a = i + 5j$, vektor $\vec{b} = -5i - 7j$ dan vektor $c = 3i - 7j$
   Gambarlah: a. $2\, .\, a - \vec{b} + c$ b. $\vec{b} - 0{,}25(a - 2.\, c\,)$ c. $a + \vec{b} + 3c$
8. Diketahui titik A(6, 4, 7), B(2, -4, 3) dan P(-1, 4, 2). Titik R terletak pada garis AB sehingga AR : RB = 3 : 1. Panjang vektor PR adalah ...
9. Diketahui vektor *A = 2i + 5j + 4k* dan *B = i + 2j -3k*. Sudut antara A dan B adalah ...
10. Diketahui vektor *A = 2i + 4j – nk* dan *B = i + 2j + 2k*. Jika kedua vektor tersebut saling tegak lurus, maka nilai *n* adalah ...

Perkalian Vektor

Materi Pokok
1. Perkalian Titik
2. Perkalian Silang
3. Perkalian Tripel

URAIAN MATERI

Perkalian Titik

Perkalian titik dua vektor **A** dan **B** dituliskan dengan **A . B** (dibaca **A** *dot* **B**).

Untuk lebih jelas, berikut didefinisikan perkalian titik pada bidang:

Secara geometri:

A . B didefinisikan sebagai perkalian antara besarnya vektor-vektor **A** dan **B** dan cosinus sudut θ antara keduanya.

$$\boxed{\boldsymbol{A} \,.\, \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta, \quad 0 \leq \theta \geq \pi}$$

Secara analitik:

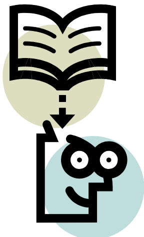
Misalkan $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j}$ dan $\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j}$ adalah dua vektor pada bidang dengan sistem koordinat x dan y, maka **A, B** didefinisikan

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2$$

Sedangkan vektor pada bidang dengan sistem koordinat x, y, dan z, dimana $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$ dan $\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k}$ maka didefinisikan:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Dari penjelasan di atas, dapat ditarik sebuah kesimpulan bahwa



"Hasil kali titik dari dua vektor menghasilkan skalar"

Perhatikan gambar berikut!

Apa yang dapat Anda simpulkan dari gambar tersebut?

Pada gambar tampak seorang anak sedang mendorong meja. Jika meja yang didorongnya berpindah kedudukannya (bergerak), maka anak tersebut telah melakukan usaha.

Namun, bagaimana dengan gambar di samping?

Pada gambar tersebut tampak seseorang sedang mendorong tembok.

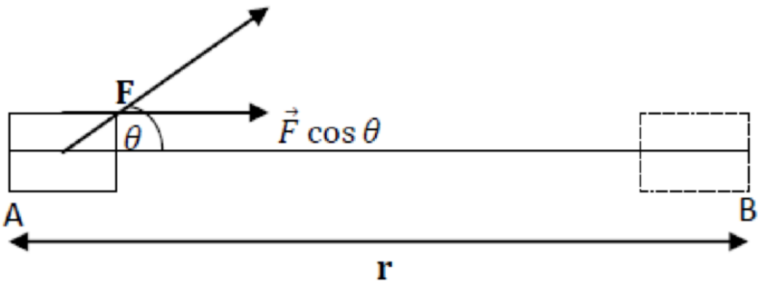
Apakah temboknya bergeser?

Jika yang mendorong tersebut adalah manusia dengan kapasitas kekuatan seperti manusia, pastinya tembok tersebut tidak akan bergeser. Karena temboknya tidak bergeser, maka dapat dikatakan bahwa kita tidak melakukan usaha, atau usaha yang kita lakukan nol.

Dari kedua kejadian tersebut dapat diseimpulkan sebuah definisi dari usaha. Dimana usaha merupakan sejumlah energi yang disalurkan

ke dalam suatu bentuk gaya pada sebuah benda tertentu yang menyebabkan benda tersebut berpindah dari kedudukan awalnya.

Sekarang perhatikan gambar di bawah ini!



Bagaimana Anda menjelaskan gambar tersebut?

Gambar tersebut menunjukkan sebuah objek yang diberi gaya sebesar **F** newton. Objek pada gambar tersebut bergerak lurus sejauh **r** dari titik **A** ke titik **B.** Usaha untuk gaya konstan tersebut dirumuskan sebagai berikut.

$$W = (|\boldsymbol{F}\ cos\ \theta|)(|\boldsymbol{r}|)$$
$$= |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{r}|cos\ \theta$$

θ adalah sudut antara gaya **F** dengan **r**

Dengan menggunakan aturan perkalian titik, maka dapat dinyatakan

W = F . r

Perkalian Vektor-Vektor Satuan

Pada operasi perkalian titik berlaku aturan untuk perkalian vektorvektor satuan,

Beberapa aturan yang harus dipenuhi dalam perkalian silang (*cross product*)

1. $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{k} = 1$
2. $\boldsymbol{i}.\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}.\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}.\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}.\boldsymbol{j} = 0$

Hasil perkalian titik dari vektor satuan-vektor satuan pada bidang dengan menggunakan definisi di atas dapat disimpulkan dalam bentuk tabel di bawah ini.

Tabel Hasil Perkalian silang dari Vektor-vektor satuan

.	**i**	**j**	**k**
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

Sifat-sifat perkalian titik

Berikut adalah sifat-sifat perkalian titik vektor.

Sifat-Sifat perkalian titik

Misalkan **A**, **B** dan **C** adalah vektor-vektor dan m adalah bilangan real, maka berlaku:

- **A . B =|A|²**
- **A . B = B . A** hukum komutatif
- **A . (B + C) = (A . B) + (A . C)** hukum distributif
- m(**A . B**) = (m**A**) . **B** = **A** . (m**B**) = (**A . B**)m m skalar
- 0 . **A** = 0
- Jika **A . B** = 0 dan **A** dan **B** bukan vektor nol, maka dikatakan **A** ⊥ B
- |**A . B**| ≤ |**A**||**B**| ketaksamaan Schwarz

Bukti

1. $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A} = (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) . (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})$

   Berdasarkan aturan perkalian titik, diperoleh

$$\boldsymbol{A}.\boldsymbol{A} = {A_1}^2 + {A_2}^2 = \left(\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2}\right)^2 = |\boldsymbol{A}|^2$$

2. $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) . (B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k})$ Berdasarkan aturan perkalian titik, diperoleh

   $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

   Karena A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, dan B_3 adalah bilangan riil, maka

   $A_1B_1 = B_1A_1$, $A_2B_2 = B_2A_2$ $A_3B_3 = B_3A_3$

Sehingga

$$\boldsymbol{A}.\,\boldsymbol{B} = B_1A_1 + B_2A_2 + B_3A_3$$
$$= \boldsymbol{B}.\,\boldsymbol{A}$$

3. $\boldsymbol{A}.\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})\,.\,[(B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k}) + (C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k})]$

   $= (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})\,.\,[(B_1 + C_1)\boldsymbol{i} + (B_2 + C_2)\boldsymbol{j} + (B_3 + C_3)\boldsymbol{k}]$

   Berdasarkan aturan perkalian titik

   $\boldsymbol{A}.\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = A_1(B_1 + C_1) + A_2(B_2 + C_2) + A_3(B_3 + C_3) = A_1B_1 + A_1C_1 + A_2B_2 + A_2C_2 + A_3B_3 + A_3C_3$

   $= (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) + (A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3)$

   Maka

   $\boldsymbol{A}.\,(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\,.\,\boldsymbol{C}$

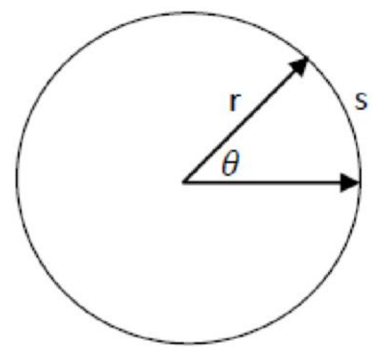
Perkalian Silang

Perkalian silang dua vektor **A** dan **B** dituliskan dengan **A** x **B** (dibaca **A** *cross* **B**).

Perhatikan gambar di samping!

Gambar tersbut merupkan sebuah kincir air. Kecepatan linear dari kincir air tersebut sama dengan kecepatan sudut kali jari-jari kincir tersebut.

Perhatikan gambar berikut!



Tinjau rotasi sebuah partikel dalam lintasan dengan jari-jari r. Jarak yang telah ditempuh dalam selang waktu Δt adalah s dengan sudut yang dibentuk adalah θ (dalam radian). Hubungan s dan θ diberikan oleh $s = r\theta$. Untuk selang waktu yang sangat kecil, maka besar kecepatan linier diberikan oleh

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}}$$

Besaran $\omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$ disebut sebagai kecepatan sudut yang arahnya diberikan oleh arah putar tangan kanan, tegak lurus bidang lingkaran. Jadi, hubungan antara kecepatan linier dengan kecepatan sudut diberikan oleh $v = \omega \times r$.

Jadi, kecepatan linier dari rotasi sebuah partikel sama dengan kecepatan sudut kali silang vektor kedudukan dari jari-jari lingkaran.

Berikut ini adalah beberap penjelasan mengenai perkalian silang (*cross product*).

Secara geometri

Perkalian silang dari dua vektor **A** dan **B** adalah sebuah vektor **C = A** x **B** (baca **A** cross **B**), yang besarnya adalah hasil kali antara besarnya **A** dan **B** dan sinus sudut antara keduanya. Secara matematis dinyatakan dengan,

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| sin\ \theta\ \mathbf{u}, \qquad 0 \leq \theta \geq \pi$$

Dimana **u** adalah vektor satuan yang menunjukkan arah dari $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$.

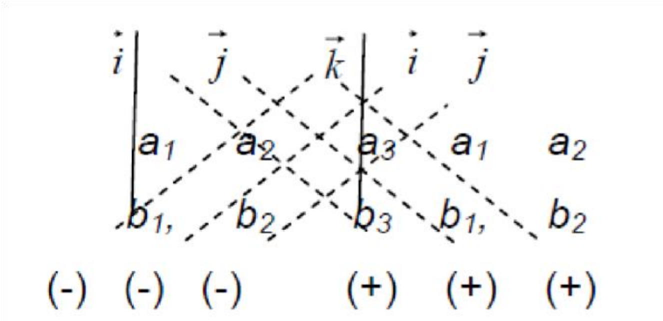
Secara Analisis

Misalkan $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$ dan $\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k}$ maka perkalian silang antara dua vektor $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$. Arah vektor $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ tegak lurus pada bidang yang memuat $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$.

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} i & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\boldsymbol{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\boldsymbol{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\boldsymbol{k}$$

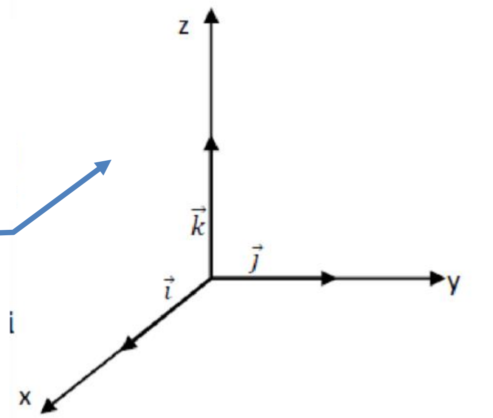
Lebih jelasnya untuk menyelesaikan sebuah operasi perkalian silang menggunakan metode *Sarrus* sebagai berikut :



Beberapa aturan yang harus dipenuhi dalam perkalian silang (*cross product*)

3. $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} = 0$
4. $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$

Remember That :
Perkalian silang searah jarus jam akan bernilai negatif, dan sebaliknya jika berlawanan arah jarum jam akan bernilai positif



Secara singkat akan ditunjukkan dalam bentuk tabel berikut

5. $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} = -\boldsymbol{k}$ 6. $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}$

7. $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$ 8.
$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$

9. $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} = -\boldsymbol{j}$

Tabel Hasil Perkalian silang dari Vektor-vektor satuan

×	**i**	**j**	**k**
i	0	k	-j
j	-k	0	i
k	j	-i	0

Sifat-sifat perkalian silang

Sifat-Sifat perkalian silang

Misalkan **A**, **B** dan **C** adalah vektor-vektor dan *m* adalah bilangan real, maka berlaku:

- **A** x **B = -B** x **A** tidak berlaku hukum komutatif
- **A** x (**B + C) = (A** x **B) + (A** x **C)** hukum distributif
- *m*(**A** x **B**) = (*m***A**) x **B** = **A** x (*m***B**) = (**A** x **B**)*m* *m* skalar
- **A** x **A =** 0
- Hasil dari |**A** x **B**| sama dengan luas jajar genjang dengan sisi **A** dan **B**
- Jika **A** x **B =** 0 dan **A** dan **B** bukan vektor nol, maka dikatakan **A ||** B

Bukti

4. Misalkan $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k}$, dan $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$, maka,

   - $$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) \times [(B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k}) + (C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k})]$$
     $$= (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) \times [(B_1 + C_1)\boldsymbol{i} + (B_2 + C_2)\boldsymbol{j} + (B_3 + C_3)\boldsymbol{k}]$$
     Dengan menggunakan aturan perkalian silang diperoleh

     $$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 + C_1 & B_2 + C_2 & B_3 + C_3 \end{vmatrix}$$

     Dengan menggunakan metode *Sarrus* diperoleh,

$= [A_2(B_3 + C_3) - A_3(B_2 + C_2)]\boldsymbol{i}$ _ $[A_1(B_3 + C_3) - A_3(B_1 + C_1)]\boldsymbol{j} +$

1 2 2 2 1 1

$$= [A_2B_3 + A_2C_3 - A_3B_2 - A_3C_2]\boldsymbol{i} - [A_1B_3 + A_1C_3 - A_3B_1 - A_3C_1]\boldsymbol{j}$$
$$+[A_1B_2 + A_1C_2 - A_2B_1 - A_2C_1]\boldsymbol{k}$$
$$= [(A_2B_3 - A_3B_2) + (A_2C_3 - A_3C_2)]\boldsymbol{i} - [(A_1B_3 - A_3B_1) +$$
$$(A_1C_3 - A_3C_1)]\boldsymbol{j} + [(A_1B_2 - A_2B_1) + (A_1C_2 - A_2C_1)]\boldsymbol{k}$$
$$= [(A_2B_3 - A_3B_2)\boldsymbol{i} - (A_1B_3 - A_3B_1)\boldsymbol{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\boldsymbol{k}] +$$
$$[(A_2C_3 - A_3C_2)\boldsymbol{i} - (A_1C_3 - A_3C_1)\boldsymbol{j} + (A_1C_2 - A_2C_1)\boldsymbol{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$[A\ (B + C\ ) - A\ (B + C\ )]\boldsymbol{k}$

A × (B + C) = (A × B) + (A × C) Terbukti

5. **A × A =** $(A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}) \times (A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k})$

   Berdasarkan aturan perkalian silang

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= (A_2A_3 - A_3A_2)\boldsymbol{i} - (A_3A_1 - A_1A_3)\boldsymbol{j} + (A_1A_2 - A_2A_1)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A} = 0$ Terbukti

Perkalian Tripel

Perkalian tripel merupakan perkalian yang mengkombinasikan operasi perkalian titik dan silang. Hasil kali titik dan silang dari tiga buah vektor **A, B** dan **C** dapat menghasilkan hasil kali yang mempunyai arti dalam bentuk - bentuk berikut **(A . B)C, A(B × C)** dan **A × (B × C).**

Sifat-Sifat PerkalianTripel

Misalkan **A, B,** dan **C** adalah vektor-vektor, maka berlaku

- (**A . B**)**C** ≠ **A**(**B . C**)
- Hasil dari **A.(B×C) = B.(C×A) = C.(A×B)** merupakan volume sebuah paralel epipidum dengan A, B dan C sebagai rusuk-rusuknya atau negatif dari volume tersebut. Positif atau negatif dari volume tersebut sesuai dengan apakah A, B dan C membentuk sistem tangan kanan atau tidak.

  Jika $\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{i} + A_2\boldsymbol{j} + A_3\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = B_1\boldsymbol{i} + B_2\boldsymbol{j} + B_3\boldsymbol{k}$, dan $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$ maka

  $$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

- **A × (B × C) ≠ (A × B) × C** Tidak berlaku hukum asosiatif
- **A × (B × C) = (A . C)B - (A . B)C**

  (A × B) × C = (A . C)B - (B . C)A

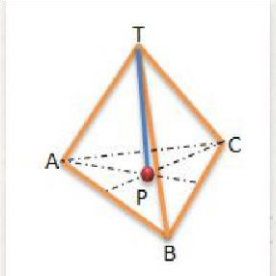
Hasil kali **A .** (**B × C**) sering disebut hasil kali tripel skalar atau hasil kali kotak dan dapat dinyatakan dengan **A .** B **× C** atau [ABC].

Hasil kali **A ×** (**B × C**) disebut hasil kali tripel vektor

Evaluasi

1. Jika A = i + 2j dan B = 2i – 3j, tentukan
   a. A . B
   b. Sudut yang dibentuk oleh A dan B
2. Jika A = 2i + 5j – 3k dan B = 4i – 3j + 2k, carilah
   a. A . B
   b. | A | dan | B |
   c. |3A + 2B|
   d. (2A + B) . (A – 3B)
3. Carilah besar sudut yang dibetuk oleh
   a. A = 3i + 2j – 6k dan B = 4i – 3j + k
   b. C = 4i – 2j + 4k dan D = 3i – 6j – 2k
4. Hitunglah luas jajar genjang yang sisi-sisinya adalah A = 2i – 6j – 3k dan B = 4i + 3j – k!
5. Jika dua vektor A dan B dinyatakan dengan A = 2i + 2j – 3k dan B = -2i + 3j – 4k. Buktikan bahwa A x B = -B x A !
6. Diketahui vektor A, B dan C. Jika A tegak lurus B, maka hasil dari $A + B - 2C = \cdots$
7. Vektor – vektor u, v, dan x tidak nol. Vektor $u + v$ tegak lurus $u - x$, jika ...
8. Diketahui vektor $A = 2i + 2j - xk$, $B = 3i - 2j + 5k$ dan $C = 2i + 3j + 2k$. Vektor A tegak lurus C maka $(A + B).(A - C)$!

9. Diberikan limas T. ABC



Misalkan $u = \overrightarrow{TA}$, $v = \overrightarrow{TB}$, $w = \overrightarrow{TC}$. Jika P adalah titik berat ΔABC maka ...

10. Diketahui $\vec{a}, \vec{b}$ dan c vektor dalam dimensi tiga. Jika $\vec{a} \perp \vec{b}$ dan $\vec{a} \perp (2\vec{b} - \vec{c})$ adalah ...
11. Diketahui |u| = 1 dan |v| = 2. Jika $\vec{u}$ dan v membentuk sudut 45^o maka $(\vec{u} + v).\, v = \cdots$
12. Tentukan luas segitiga yang titik-titk sudutnya (3,-1, 2), (1,-1,-3) dan (4,-3,1) !
13. Tetukan volume sebuah balok yang sisi-sisinya dinyatakan dengan A = 2i – 3j + 4k, B = i + 2j – k, dan C = 3i – j + 2k !

Diferensial Vektor

Materi Pokok
1. Integral Biasa
2. Integral Garis
3. Integral Bidang
4. Integral Volume

URAIAN MATERI

Sebelum memahami lebih jauh mengenai integral garis, bidang dan volume, maka kita terlebih dahulu harus memahami tentang integral biasa dari sebuah fungsi vektor.

Fungsi Vektor

Jika sembarang nilai skalar t dikaitkan dengan suatu vektor **A**, maka bisa dinyatakan sebagai fungsi vektor dari t atau $\mathbf{A}(t)$, yaitu suatu vektor yang komponen-komponennya merupakan fungsi dari nilai skalar t. Dalam R^2, fungsi vektor biasa ditulis dengan,

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{j} \tag{3.1}$$

dalam R^3, fungsi vektor $\mathbf{A}(t)$ ditulis dengan,

$$\boldsymbol{A}(t) = \boldsymbol{A}_1(t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{A}_2(t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{A}_3(t)\boldsymbol{k} \tag{3.2}$$

Konsep fungsi vektor ini bisa diperluas, jika sembarang titik (x,y,z) di R^3 dikaitkan dengan suatu vektor **A**, maka **A** bisa dinyatakan dalam bentuk fungsi vektor sebagai berikut:

$$\boldsymbol{A}(x, y, z) = \boldsymbol{A}_1(x, y, z)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{A}_2(x, y, z)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{A}_3(x, y, z)\boldsymbol{k} \tag{3.3}$$

Setelah kita mengetahui fungsi vektor, maka selanjutnya kita pelajari turunan biasa dari fungsi vektor.

Turunan Biasa

Masih ingat Anda, apa saja yang termasuk besaran vektor? Coba sebutkan!

Ya, yang termasuk besaran vektor adalah kecepatan, gaya, dan perpindahan.

Pesawat yang merupakan alat transportasi udara yang terbang dengan rute Balikpapan-Jakarta berarti pesawat tersebut melakukan perpindahan dengan titik awalnya Balikpapan dan titik akhirnya Jakarta. Pesawat tersebut dikatakan melakukan perpindahan karena adanya perubahan kedudukan antara titik awal (Balikpapan) dan titk akhir pesawat (Jakarta).

Pesawat yang melakukan perpindahan mempunyai kecepatan dan percepatan. Hubungan yang kita dapatkan dari perpindahan, kecepatan, dan percepatan adalah, kecepatan merupakan perpindahan benda tiap selang waktu tertentu atau bisa dikatakan turunan dari perpindahan sebagai fungsi waktu. Percepatan merupakan hasil bagi antara perubahan kecepatan dengan selang waktu berubahnya kecepatan tersebut atau dapat dikatakan turunan kecepatan sebagai fungsi waktu. Lebih jelasnya mari kita pelajari lebih lanjut!

Differensial Vektor

Pada bahasan ini kita gunakan $\mathbf{R}(t)$ untuk menyatakan fungsi vektor. Misalkan $\mathbf{R}\ (t)$ sebuah vektor yang bergantung pada sebuah variabel skalar tunggal t. Maka

$$\boxed{\frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t}}$$

(3.5)

Turunan biasa dari vektor ***R (t)*** terhadap skalar *t* diberikan oleh

$$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{R}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{R}(t+\Delta t) - \boldsymbol{R}(t)}{\Delta t} \quad (3.6)$$

Jika limitnya ada.

Karena $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}$ adalah sebuah vektor yang bergantung pada *t*, maka kita dapat meninjau turunannya terhadap *t*. Jika turunan ini diturunkan kembali, maka dia dinyatakan oleh $\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}$. Dengan cara yang sama juga digunakan untuk membahas turunan pada orde yang lebih tinggi.

Penjelasan lebih detail untuk identifikasi turunan dari fungsi vektor dapat dilakukan dengan menggunakan fungsi limit (pendekatan), misalkan saja sebuah fungsi vektor dinyatakan dengan $R(t)$, maka,

$$\lim_{t \to t_0} R(t) = l \quad (3.7)$$

Fungsi vektor $R(u)$ dikatakan kontinu pada $u = u_0$ apabila fungsi tersebut terdefinisi di sekitar u_0.

$$\lim_{t \to t_0} R(t) = R(t_0) \quad (3.8)$$

Dengan menggunakan sistem koordinat Cartesian, vektor $R(t)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\boldsymbol{R}(t) = R_x(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_y(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + R_z(t)\hat{\boldsymbol{k}} \quad (3.9)$$

Jadi $R(t)$ kontinu pada t_0 jika dan hanya jika ketiga fungsi skalar $R_x(t)$, $R_y(t)$ dan $R_z(t)$ kontinu pada t_0.

Jika fungsi vektor $\boldsymbol{R}(t) = R_x(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + R_y(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + R_z(t)\hat{\boldsymbol{k}}$ dengan fungsi skalar-fungsi skalar $R_x(t)$, $R_y(t)$ dan $R_z(t)$ dapat diferensialkan terhadap variabel t, maka $\mathbf{R}(t)$ mempunyai turunan variabel terhadap yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\boxed{\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{R}_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\boldsymbol{R}_y}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d\boldsymbol{R}_z}{dt}\boldsymbol{k}} \qquad (3.10)$$

Bila veriabel bebas t dari fungsi vektor $R(t)$ berubah sebesar Δt maka fungsi tersebut secara keseluruhan akan berubah baik besarnya maupun arahnya. Untuk perubahan skalar sebesar Δu akan diperoleh perubahan vektor sebesar.

$$\Delta R = R(t+\Delta t) - R(t) = R_x(t+\Delta t)\hat{\imath} + R_y(t+\Delta t)\hat{\jmath} + R_z(t+\Delta t)\hat{k} \qquad (3.11)$$

Atau

$$\Delta R = \Delta R_x\hat{\imath} + \Delta R_y\hat{\jmath} + \Delta R_z\hat{k} \qquad (3.12)$$

Sehingga diferensiasi dari fungsi vektor $R(t)$ dapat didefinisikan sebagai:

$$\frac{dR}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{R(t+\Delta t) - R(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta t} \qquad (3.13)$$

Persamaan (3.13) sama artinya dengan Persamaan (3.2). Hanya pernulisan fungsi vektornya saja yang berbeda. Atau bila digunakan persamaan (3.13) maka diferensiasi sebuah vektor $R(t)$ dapat didefinisikan sebagai:

$dR = dR_x\hat{\imath} + dR_y\hat{\jmath} + dR_z\hat{k}$ (3.14)

Misalkan untuk vektor posisi sebuah titik *(x, y, z)* dari pusat koordinat dinyatakan sebagai:

$R(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$ (3.15)

Diperoleh

$dR(t) = dx(t)\hat{\imath} + dy(t)\hat{\jmath} + dz(t)\hat{k}$ (3.16)

Bila t mengalami perubahan maka titik ujung $R(t)$ melukiskan suatu kurva di dalam ruang dengan persamaan parameter.

$x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (3.17)

Apabila ia menyatakan variabel waktu maka $\frac{dR}{dt}$ adalah merupakan kecepatan $\vec{v}$ dan diferensiasi fungsi $\vec{v}$ terhadap waktu merupakan percepatan $\vec{a}$ sepanjang kurva, ditulis :

$$\vec{v}(t) = \frac{dR(t)}{dt}, \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \qquad (3.18)$$

Contoh:

- Sebuah benda bergerak sepanjang kurva yang persamaan parameternya adalah $x = e^{-2t}$, $y = 3\cos 2t$, dan $z = \sin 3t$. Bila t adalah waktu maka tentukanlah kecepatan dan percepatan benda tersebut!

  Penyelesaian

  Bila vektor posisi sebuah benda dinyatakan sebagai:

  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$

  $\quad = e^{-2t}\hat{\imath} + 3\cos 2t\,\hat{\jmath} + \sin 3t\,\hat{k}$

Maka

- Kecepatan benda tersebut adalah

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$= -2e^{-2t}\hat{\imath} - 6\sin 2t\,\hat{\jmath} + 3\cos 3t\,\hat{k}$$

- Percepatan benda adalah

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4e^{-2t}\hat{\imath} - 12\cos 2t\hat{\jmath} - 9\sin 3t\,\hat{k}$$

Rumus Turunan Biasa Fungsi Vektor

Jika vektor $\vec{A}, \vec{B}$ dan $\vec{C}$ adalah fungsi-fungsi vektor dari sebuah skalar t yang terdefinisi, dan sebuah fungsi skalar dari t yang terdefinisi maka akan berlaku formulasi berikut ini.

1. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \pm \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$ (3.19)

2. $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} \pm \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}$ (3.20)

3. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} \pm \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$ (3.21)

4. $\frac{d}{dt}(\varphi\vec{A}) = \frac{dS}{dt}\vec{A} \pm \varphi\frac{d\vec{A}}{dt}$ (3.22)

5. $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} \times \vec{C} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C} + \vec{A}.\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}$ (3.23)

6. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times (\vec{B} \times \vec{C}) + A \times \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C}\right) + \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}\right)$ (3.24)

Pembuktian Sifat Turunan Fungsi Vektor

Untuk membuktikan sifat-sifat dari turunan biasa, kita dapat menggunakan definisi turunan biasa.

- $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{[\boldsymbol{A}(t+\Delta t)+\boldsymbol{B}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t} \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{B}(t+\Delta t)-\boldsymbol{B}(t)}{\Delta t}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

- $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{[\boldsymbol{A}(t+\Delta t)+\boldsymbol{B}(t+\Delta t)]-[\boldsymbol{A}(t)+\boldsymbol{B}(t)]}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)\,.\ \boldsymbol{B}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t+\Delta t)\,.\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t+\Delta t)\,.\boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{A}(t)\,.\boldsymbol{B}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t).[\boldsymbol{B}(t+\Delta t)-\boldsymbol{B}(t)]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0} \frac{[\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)].\boldsymbol{B}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \boldsymbol{A}(t+\Delta t)\,.\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{B}(t+\Delta t)-\boldsymbol{B}(t)}{\Delta t}$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(t+\Delta t)-\boldsymbol{A}(t)}{\Delta t}\,.\boldsymbol{B}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}.\boldsymbol{B}$$

- $\frac{d}{dt}(\phi\boldsymbol{A}) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\phi(t+\Delta t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{t})A(t)}{\Delta t}$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\phi(t+\Delta t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})-\phi(t+\Delta t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})+\phi(t+\Delta t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})-\phi(t)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\phi(t+\Delta t)[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})]+[\phi(t+\Delta t)-\phi(t+\Delta t)]\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0} \phi\,(t+\Delta t).\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t})}{\Delta t} +$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\phi(t+\Delta t)-\phi(t)}{\Delta t}.\boldsymbol{A}(t)$$

$$\frac{d}{dt}(\phi\boldsymbol{A}) = \phi\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}\boldsymbol{A}$$

Selanjutnya jika vektor $A^{\rightarrow}$ adalah sebuah vektor $A^{\rightarrow}$ yang bergantung pada lebih dari satu variabel skalar (misalnya x, y, z) maka vektor $A^{\rightarrow}$

dapat dituliskan Turunan parsial dari vektor $\vec{A}$ terhadap x, y, dan z dapat didefinisikan sebagai:

- $\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x,y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta x}$ (3.25a)
- $\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x,y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta y}$ (3.25b)
- $\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x,y,z)-\vec{A}(x,y,z)}{\Delta z}$ (3.25c) Turunan-turunan yang lebih tinggi dapat ditentukan dengan formulasi berikut ini.

- $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)$ (3.26)
- $\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right), \quad \frac{\partial^3 \vec{A}}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z^2}\right)$ (3.26)

Bila vektor $\vec{A}$ merupakan fungsi dari x, y dan z maka,

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}dz \quad (3.27)$$

Turunan Parsial dari Vektor-Vektor

Turunan parsial digunakan untuk fungsi vektor dua variabel atau lebih, prinsipnya sama dengan definisi turunan fungsi vektor satu variabel, dimana semua variabel dianggap konstan, kecuali satu, yaitu variabel terhadap apa fungsi vektor itu diturunkan.

Jika **A** adalah sebuah vektor yang bergantung pada lebih dari satu variabel skalar, misalkan *x, y, z,* maka kita tuliskan **A = A** (*x, y, z*), maka turunan parsial dari **A** terhadap *x* didefinisikan sebagai

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x} \quad (3.31a)$$

Jika limitnya ada, demikian pula

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x,y+\Delta y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta y} \quad (3.31b)$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x,y,z+\Delta z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta z}$$

(3.31c)

Adalah masing-masing turunan parsial dari fungsi **A**, jika limitnya ada.

Jika fungsi vektor $\boldsymbol{A}(x,y,z) = A_1(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_1(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_3(x,y,z)\boldsymbol{k}$ dengan fungsi skalar-fungsi skalar $A_1(x,y,z)$, $A_1(x,y,z)$ dan $A_3(x,y,z)$ mempunyai turunan parsial terhadap variabel x, y dan z, maka $\boldsymbol{A}(x, y, z)$ juga mempunyai turunan variabel terhadap x, y dan z yang dirumuskan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_2}{\partial x}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_3}{\partial x}\boldsymbol{k} \qquad (3.32a)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial y} = \frac{\partial A_1}{\partial y}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_2}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_3}{\partial y}\boldsymbol{k} \qquad (3.32b)$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial z} = \frac{\partial A_1}{\partial z}\boldsymbol{i} + \frac{\partial A_2}{\partial z}\boldsymbol{j} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\boldsymbol{k} \qquad (3.32c)$$

Selanjutnya pelajari sifat-sifatnya. Berikut sifat-sifat turunan parsial:

Sifat-Sifat turunan Parsial
Misalkan **A** dan **B** adalah fungsi-fungsi vektor dan adalah fungsi skalar x, y dan z dan dapat dideferensialkan terhadap ketiga variabel tersebut, maka berlaku

- $\frac{\partial}{\partial x}(A+B) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial x}$
- $\frac{\partial}{\partial x}(\phi A) = \phi\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x}A$
- $\frac{\partial}{\partial x}(A.B) = A.\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}.B$
- $\frac{\partial}{\partial x}(A \times B) = A \times \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \times B$
- $\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}(A.B) = \frac{\partial}{\partial y}\{\frac{\partial}{\partial x}(A.B)\} = \frac{\partial}{\partial y}\{A.\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}.B\}$

$$= A.\frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}.\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}.\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}.B$$

Bukti

- Berdasarkan definisi pada persamaan 3.3

$$\frac{\partial}{\partial x}(A+B) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)+\boldsymbol{B}(x+\Delta x,y,z)]-[\boldsymbol{A}(x,y,z)+\boldsymbol{B}(x,y,z)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)+\boldsymbol{B}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)-\boldsymbol{B}(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)]+[\boldsymbol{B}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{B}(x,y,z)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{A}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{A}(x,y,z)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{B}(x+\Delta x,y,z)-\boldsymbol{B}(x,y,z)}{\Delta x}$$

Sehingga

$$\frac{\partial}{\partial x}(A+B) = \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}$$

- $\frac{\partial}{\partial x}(\phi A) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z)A(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)A(x,y,z)}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z)A(x+\Delta x,y,z)-\phi(x+\Delta x,y,z)A(x,y,z)+\phi(x+\Delta x,y,z)A(x,y,z)-\phi(x,y,z)A(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z)[A(x+\Delta x,y,z)-A(x,y,z)]+A(x,y,z)[\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z)[A(x+\Delta x,y,z)-A(x,y,z)]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x,y,z)[\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \phi(x+\Delta x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x,y,z)-A(x,y,z)}{\Delta x} +$$
$$\lim_{\Delta x \to 0} A(x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}$$

$$= \phi(x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A(x+\Delta x,y,z)-A(x,y,z)}{\Delta x}$$
$$+A(x,y,z) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta x}$$

Sehingga

$\frac{\partial}{\partial x}(\phi A) = \phi \frac{\partial A}{\partial x} + A \frac{\partial \phi}{\partial x}$ atau $\frac{\partial}{\partial x}(\phi A) = \phi \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A$

Aturan Rantai

Misalkan F = F (x, y, z) adalah fungsi vektor yang dapat dideferensialkan terhadap variabel x, y dan z, dimana x = x(s, t, u), y = y(s, t, u), dan z = z(s, t, u) adalah fungsi-fungsi skalar yang dapat dideferensialkan terhadap variabel s, t dan u maka bentuk fungsi tersusun F dapat dituliskan dengan

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}[x(s,t,u), y(s,t,u), z(s,t,u)] \qquad (3.34)$$

Turunan parsial F terhadap variabel s, t dan u dapat diberikan sebagai berikut:

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial u} = \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

Soal-soal yang diselesaikan

- Jika diberikan vektor $\vec{A} = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ dan $\vec{B} = \sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath}$ maka tentukanlah $\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B})$!

  Penyelesaian

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 10t\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}\,, \frac{d\vec{B}}{dt} = \cos t\,\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}.\vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$= (10t\,\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3t^2\hat{k}).(\sin t\,\hat{\imath} - \cos t\,\hat{\jmath})$$

$$+(5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3k).(\cos t\,\hat{\imath} + \sin t\,\hat{\jmath})$$

$$= 10\,t\sin t - \cos t + 5t^2\cos t + t\sin t$$

$$= 11\,t\sin t + (5t^2 - 1)\cos t$$

- Jika $R\ (u)=x\ (u)$i + $y\ (u)$j + $z\ (u)$k, dimana x, y, z fungsi-fungsi diferensiabel dari sebuah skalar u. Buktikan bahwa

$$\frac{dR}{du} = \frac{dx}{du}\mathbf{i} + \frac{dy}{du}\mathbf{j} + \frac{dz}{du}\mathbf{k}$$

Penyelesaian

$$\frac{dR}{du} = \lim_{\Delta u \to u} \frac{R(u+\Delta u) - R(u)}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to u} \frac{[x(u+\Delta u)\boldsymbol{i} + y(u+\Delta u)\boldsymbol{j} + z(u+\Delta u)\boldsymbol{k}] - [x(u)\boldsymbol{i} + y(u)\boldsymbol{j} + z(u)\boldsymbol{k}]}{\Delta u}$$

$$= \lim_{\Delta u \to u} \frac{x(u+\Delta u) - x(u)}{\Delta u}\boldsymbol{i} + \frac{y(u+\Delta u) - y(u)}{\Delta u}\boldsymbol{j} + \frac{z(u+\Delta u) - z(u)}{\Delta u}\boldsymbol{k} = \frac{dx}{du}\boldsymbol{i} + \frac{dy}{du}\boldsymbol{j} + \frac{dz}{du}\boldsymbol{k}$$

- Jika $\boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{e}^{sin(t2+2t)}\mathbf{i} + \ln(t^2 + 2t)\boldsymbol{j} + 4t^3\boldsymbol{k}$ tentukan $\frac{df}{dt}$

Penyelesaian

$$\frac{df}{dt} = \frac{df_1}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{df_2}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{df_3}{dt}\boldsymbol{k}$$

$$= \frac{d\left(\boldsymbol{e}^{sin(t^2+2t)}\right)}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{d\left(\ln(t^2+2t)\right)}{dt}\boldsymbol{j} + \frac{d(4t^3)}{dt}\boldsymbol{k}$$

$$= (2t+2)cos\ (t^2+2t)\boldsymbol{e}^{sin(t^2+2t)}\boldsymbol{i} + \frac{2t+2}{t^2+2t}\boldsymbol{j} + 12t^2\ \boldsymbol{k}$$

- Buktikan sifat $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}.\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}.\boldsymbol{B}$

Penyelesaian

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(\boldsymbol{A}+\Delta \boldsymbol{A}).(\boldsymbol{B}+\Delta \boldsymbol{B})-\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}.\Delta \boldsymbol{B}+\Delta \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}+\Delta \boldsymbol{A}.\Delta \boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}}{\Delta t}\\
&= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{A}.\Delta \boldsymbol{B}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}.\Delta \boldsymbol{B}}{\Delta t}\\
&= \boldsymbol{A}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{B}}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}.\boldsymbol{B}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}.\lim_{\Delta t\to 0}\Delta \boldsymbol{B} =
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}.\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}.\boldsymbol{B}+\frac{\Delta \boldsymbol{B}}{\Delta t}.0$$

$$= \boldsymbol{A}.\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}+\frac{\Delta \boldsymbol{A}}{\Delta t}.\boldsymbol{B}$$

Evaluasi

Untuk memperdalam pemahaman tentang materi tersebut, kerjakanlah latihan berikut !

1. Diketahui $\vec{A} = 2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{C} = -\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, Hitunglah besarnya : a) $\vec{B} - \vec{A}$

   b) $2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{C}$
2. Jika $\vec{p} = 2\hat{\imath} - \hat{\jmath} + \hat{k}$, $\vec{q} = \hat{\imath} + 3\hat{\jmath} - 2\hat{k}$, $\vec{r} = -2\hat{\imath} + \hat{\jmath} - 3\hat{k}$, $\vec{s} = 3\hat{\imath} +$

   $2\hat{\jmath} + 5\hat{k}$ maka tentukanlah skalar *a, b, c* agar dipenuhi persamaan $\vec{s} = a\vec{p} + b\vec{q} + c\vec{r}$!
3. Diberikan vektor $\vec{a} = \hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, dan $\vec{c} = 3\hat{\imath} - 4\hat{\jmath} - \hat{k}$

   a) $\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c})$

   b) $\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$
4. Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $\vec{x} = 2t^2$, $\vec{y} = t^2$ dan $\vec{z} =$

   $3t - 5$, Hitunglah,

   a) Kecepatan partikel pada saat $t = 1$

   b) Percepatan partikel pada saat $t = 4$
5. Jika $\vec{r_1} = 5t^2\hat{\imath} + t\hat{\jmath} - t^3\hat{k}$ dan $\vec{r_2} = \sin t\hat{\imath} - \cos t\hat{\jmath}$ tentukanlah $\frac{d}{dt}(\vec{r_1} \times \vec{r_2})$!

6. Jika $R = e^{-t}\boldsymbol{i} + ln(e^{-t} + 1)\boldsymbol{j} - tan\ t\ \boldsymbol{k}$ carilah $(a)\,\frac{dR}{dt}$, $(b)\,\frac{d^2R}{dt}$, $(c)\left|\frac{dR}{dt}\right|$, $(d)\left|\frac{d^2R}{dt}\right|$ pada saat $t = 0$!
7. Jika $A = 5t^2\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^3\boldsymbol{k}$ dan $B = sin\ t\ \boldsymbol{i} + cos\ t\boldsymbol{j}$ carilah $\frac{d}{dt}(A.B)$!
8. Misalkan $A = e^{sin\ x2yz}\ \boldsymbol{i} + cos\ x^3y^2z\boldsymbol{j} + ln\ x^4y^3z\ \boldsymbol{k}$.
   Tentukan
   $(a)\,\frac{\partial A}{\partial x}$, $(b)\,\frac{\partial A}{\partial y}$, $(c)\,\frac{\partial A}{\partial z}$!
9. Jika **Z** = $3x^2$ **i** – y^2 **j**, dengan x = 2s + 7t dan y = 5st, tentukan $\frac{\partial z}{\partial t}$ dan nyatakan dalam bentuk s dan t!

2

10. Jika F = $sin\ xy^2z$ **i** + $2yz$ **j** + z^2 **k,** maka tentukan $\frac{d\ \ F}{dt}$!

Integral Vektor

Materi Pokok
1. Integral Biasa
2. Integral Garis
3. Integral Bidang
4. Integral Volume

URAIAN MATERI

Sebelum memahami lebih jauh mengenai integral garis, bidang dan volume, maka kita terlebih dahulu harus memahami tentang integral biasa dari sebuah fungsi vektor.

Integral Biasa

Kecepatan merupakan turunan dari perpindahan sebagai fungsi waktu. Sedangkan percepatan merupakan turunan kecepatan sebagai fungsi waktu. Dari kedua hal tersebut, maka bagaimana jika kita ingin mencari kecepatan dan perpindahan sedangkan yang diketahui adalah fungsi percepatan?

Berdasarkan definisi sebelumnya bahwa percepatan

merupakan turunan dari kecepatan, maka dapat dikatakan bahwa kecepatan merupakan anti turunan dari percepatan. Sedangkan, kecepatan yang merupakan turunan dari perpindahan, maka berarti perpindahan adalah anti turunan dari kecepatan. Oleh karena itu, untuk mencari kecepatan berarti kita harus mengintegralkan percepatan dan untuk mencari perpindahan berarti kita harus mengintegralkan kecepatan.

Definisi Integral Biasa

Misalkan $\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{\imath} + A_y(t)\hat{\jmath} + A_z(t)\hat{k}$ adalah sebuah vektor yang bergantung pada suatu variabel t dan $A_1(t), A_2(t), A_3(t)$ kontinu dalam suatu selang yang ditentukan. Maka integral tak tentu dari $A^{\rightarrow}(t)$ didefinisikan sebagai,

$$\int \vec{A}(t)dt = i\int A_x(t)dt + j\int A_y(t)dt + k\int A_z(t)dt$$

Bila terdapat sebuah vektor $B^{\rightarrow\rightarrow}(t)$ sehingga vektor $\vec{A}(t) = \frac{d\vec{B}(t)}{dt}$ maka

$$\int \vec{A}(t)dt = \int \left[\frac{d\vec{B}(t)}{dt}\right] dt = \int d\vec{B}(t) = \vec{B}(t) + C$$

Dimana C adalah merupakan konstanta yang nilainya sembarang.
Integral tentu antara limit *t* = *a* dan *t* = *b* dapat dinyatakan sebagai

$$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \int_a^b \left[\frac{d\vec{B}(t)}{dt}\right] dt = \int_a^b d\vec{B}(b) - \vec{B}(a)$$

Jadi misalkan fungsi percepatan diberikan oleh $\boldsymbol{a}(t) = a_1(t)\boldsymbol{i} + a_2(t)\boldsymbol{j} + a_3(t)\boldsymbol{k}$ yang bergantung pada parameter t (waktu), maka kecepatan $\boldsymbol{v}(t)$ adalah integral dari percepatan $\boldsymbol{a}(t)$ diberikan oleh,

$$\int \boldsymbol{a}(t)dt = \boldsymbol{i}\int a_1(t)\,dt + \boldsymbol{j}\int a_2(t)\,dt + \boldsymbol{k}\int a_3(t)\,dt = \boldsymbol{v}(t) + C$$

Contoh

- Percepatan sebuah benda pada saat $t \geq 0$ dapat dinyatakan sebagai
  $a^{\rightarrow}(t) = e^{-t}\hat{\imath} - 6(t+1)\hat{\jmath} + 3\sin t\,\hat{k}$

Jika diketahui pada saat $t = 0$, $\vec{v}(0) = 0$, dan $\vec{r}(0) = 0$ maka hitunglah

a. Kecepatan benda untuk sembarang t

b. Posisi benda untuk sembarang t

Penyelesaian

a. Percepatan sebuah benda dirumuskan sebagai

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$ atau $\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt$

Jadi kecepatan benda untuk sembarang t adalah :

$$\vec{v}(t) = \int_0^t [e^{-t}\hat{\imath} - 6(t+1)\hat{\jmath} + 3\ sin\ t\ \hat{k}]\ dt$$

$$= \hat{\imath}(-e^{-t})\Big|_0^t - \hat{\jmath}(3t^2 + 6t)\Big|_0^t + \hat{k}(-3cos\ t)\Big|_0^t$$

$$= \hat{\imath}(1 - e^{-t}) - \hat{\jmath}(3t^2 + 6t) + \hat{k}(3 - 3cos\ t)$$

b. Dengan cara yang sama, posisi benda untuk sebarang t dapat dinyatakan sebagai:

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t)dt$$

$$= \hat{\imath}\int_0^t(1 - e^{-t}) - \hat{\jmath}(t^3 + 3t^3) + \hat{k}(3t - 3sin\ t)$$

Integral Garis

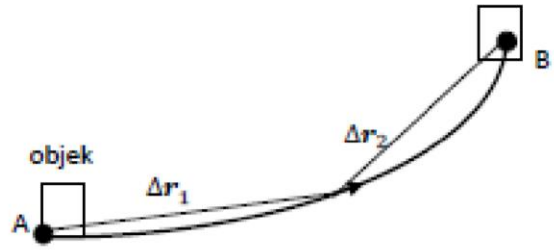
Usaha merupakan hasil dari perkalian titik antara gaya yang dilakukan dengan perpindahan yang terjadi.

Rumus usaha adalah

$$W = F \cdot s$$

W = Usaha (joule)
F = Gaya (Newton)
s = jarak (m)

Perhatikan gambar berikut !



Gambar 3.1 Obyek yang bergerak dari titik A ke titik B

Dari Gambar 3.1, dapat kita lihat terdapat objek yang bergerak dari titik A ke titik B. Obyek tersebut tidak bergerak lurus. Gerakan obyek tersebut terjadi karena ada gaya yang bekerja padanya. Jika gaya yang diberikan terhadap sebuah obyek berubah besar dan arahnya, dan objek bergerak tidak lurus, maka usaha yang dilakukan dinyatakan sebagai :

$$\boxed{W = \sum_i F_i \cdot \Delta r_i}$$

Jika perubahan fungsi jarak dialami secara kontinu, maka persamaan tersebut berubah menjadi bentuk integral,

$$W = \int_a^b F . d\boldsymbol{r}$$

Persamaan tersebut menyatakan perpindahan dari titik a ke titik b sepanjang lintasan C. Usaha yang dihasilkan merupakan integral garis dari fungsi vektor **F**.

Integral Garis

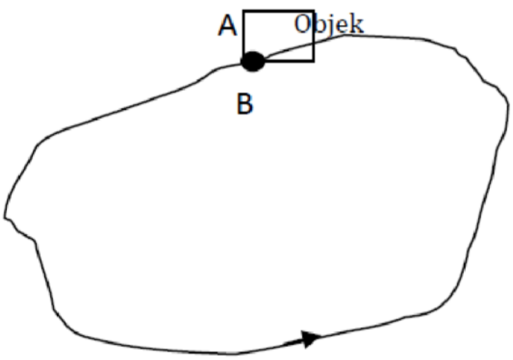
Integral garis dari dari suatu fungsi vektor **A**(t) sepanjang kurva C yang terdefinisi pada $a \leq t \geq b$, didefinisikan sebagai berikut.

$$\int_C \mathbf{A}. d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{A}.\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_a^b (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) . (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz)$$

$$= \int_a^b (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}) . (\mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz)$$

Perhatikan gambar di bawah ini!

Pada gambar 3.2 tampak sebuah obyek bergerak sepanjang lintasan C. Terlihat bahwa lintasan C merupakan lintasan lingkar yang tidak lurus yang berawal dari titik A dan berakhir pada titik B, dimana A=B.



$\boldsymbol{C}: \mathbf{r}(t)$

Gambar 3.1 Lintasan melingkar dari sebuah obyek

Artinya titik awal obyek juga merupakan titik akhir dari obyek tersebut. Jadi, dapat dikatakan bahwa objek tersebut bergerak sepanjang lintasan tertutup.

Jadi, usaha yang diperoleh pada lintasan tertutup di atas adalah

$$\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{r} = \oint_C (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}).d(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$$

$$= \oint_C (A_1dx + A_2dy + A_3dz)$$

Contoh Soal

1. Jika $\boldsymbol{R}\,(u) = u^2\boldsymbol{i} + (u^2 - 1)\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ tentukan !
   a. $\int \boldsymbol{R}\,(u)du$
   b. $\int_0^1 \boldsymbol{R}(u)du$

Penyelesaian

a. $\int \boldsymbol{R}\,(u)du = \int[u^2\boldsymbol{i} + (u^2 - 1)\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}]\,du$

$$= \boldsymbol{i}\int u^3du + \boldsymbol{j}\int (u^3 - 1)du + \boldsymbol{k}\int 5\,du$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{u^4}{4} + c_1\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{u^3}{3} - u + c_2\right) + \boldsymbol{k}(5u + c_3)$$

$$= \left(\frac{u^4}{4}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\boldsymbol{j} + (5u)\boldsymbol{k} + c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{u^4}{4}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\boldsymbol{j} + (5u)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}$$

c. $\int_0^1 \boldsymbol{R}\,(u)du = \left(\frac{u^4}{4}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{u^3}{3} - u\right)\boldsymbol{j} + (5u)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}\,|_0^1$

$$= \left[\left(\frac{1^4}{4}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1^3}{3} - u\right)\boldsymbol{j} + (5.1)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{c}\right] - [0 + \boldsymbol{c}]$$

$$= \frac{1}{4}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

Di mana **c** adalah vektor konstan $c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$

2. Jika $\mathbf{A}(t) = t\mathbf{i} - t^2\boldsymbol{j} + (t-1)\boldsymbol{k}$ dan $\mathbf{B}(t) = 2t^2\mathbf{i} - 6t\boldsymbol{k}$ hitunglah $\int_0^2 \mathbf{A}.\mathbf{B}\ dt$

Penyelesaian

$$\int_0^2 \mathbf{A}.\mathbf{B}\ dt = \int_0^2 [t\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} + (t-2)\mathbf{k}]\,(2t^2\mathbf{i} + 6t\mathbf{k})\ dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + 6t(t-1)dt$$

$$= \int_0^2 2t^3 + 6t^2 - 6t\ \ dt$$

$$= \frac{t^4}{2} + 2t^3 - 3t^2 + \boldsymbol{c}\,|_0^2$$

$$= \left[\frac{2^4}{2} + 2(2)^3 - 3(2)^2 + \boldsymbol{c}\right] - \left[\frac{0^4}{2} + 2(0)^3 - 3(0)^2 + \boldsymbol{c}\right]$$

$$= 8 + 16 - 12 = 12$$

3. Jika $\mathbf{A} = (2x^2 - 4yz)\mathbf{i} + (y - 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$. Hitunglah

   $\int_c \mathbf{A}.\,d\mathbf{r}$ dari (0, 0, 0) sampai (1, 1, 1) sepanjang lintasan berikut.

   a. $x = t,\ y = t^2,\ z = t^2$
   b. Garis lurus dari (0, 0, 0) sampai (0, 0, 1), kemudian sampai (0, 1, 1) dan setelah itu sampai (1, 1, 1)
   c. Garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 1) dan (1, 1, 1)

Penyelesaian

$$\int_c \mathbf{A}.\,d\mathbf{r} = \int_c [(2x^2 - 4yz)\mathbf{i} + (y - 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}].$$

$$(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_c [(2x^2 - 4yz)dx + (y - 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz]$$

a. Jika $x = t, y = t^2, z = t^3$ titik $(0, 0, 0)$ dan $(1, 1, 1)$ masingmasing dengan $t = 0$ dan $t = 1$ yang diperoleh dengan menggunakan persamaan paramater. Maka

$$\int_c \mathbf{A}.\,d\mathbf{r} = \int_c (2t^2 - 4(t^2)(t^2))dt + ((t^2) - 3(t)(t^2))d(t^2)$$

$$+(1 - 4(t)(t^2)(t^3))d(t^3)$$

$$= \int_{t=0}^{1} (2t^2 - 4t^5)dt + (2t^3 - 6t^4)dt + (3t^2 - 12t^{11})$$

$$= -\frac{4}{20}$$

b. Sepanjang garis lurus dari $(0, 0, 0)$ sampai $(0, 0, 1)$, $x = 0$, $y = 0$, $dx = 0$, $dy = 0$ sedang z berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{z=0}^{1} (0)0 + (0)0 + (1 - 0)dz = \int_{z=0}^{1} 1 \ dz = 1$$

Sepanjang garis lurus dari titik $(0, 0, 1)$ sampaititik $(0, 1, 1)$, $x = 0$, $z = 0$, $dx = 0$, $dz = 0$, sedang y berubah dari 0 sampai 1.
Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{y=0}^{1} \big(2(0)^2 - 4y(1)\big)0 + \big(y - 3(0)(1)\big)dy + (1 - 4(0)y(1)^2)\mathbf{0}$$

$$\int_{y=0}^{1} 2y \ dy = 1$$

Sepanjang garis lurus dari titik (0, 1, 1) sampaititik (1, 1, 1), $y = 1$, $z = 1$, $dy = 0$, $dz = 0$, sedang x berubah dari 0 sampai 1. Maka integral sepanjang bagian lintasan ini adalah

$$\int_{x=0}^{1} [3x^2 - 4.1.1]dx + [1 + 3x.1]0 + [1 - 4x.1.1^2]0$$

$$= \int_{x=0}^{1} [3x^2 - 4]dx = -3$$

Jadi $\int_c \boldsymbol{A}.dr = 1 + 1 - 3 = -1$

4. Carilah usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya yang diberikan oleh **F** = y**i** + x^2**j** sepanjang kurva $x = 2t$, $y = t^2 - 1$ dari $t = 0$ hingga $t = 2$

Penyelesaian

$$\int_c \boldsymbol{F}.d\boldsymbol{r} = \int_c (y\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}).(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j})$$

$$= \int_c^2 ydx + x^2dy$$

$$= \int_c^2 (t^2 - 1)2dt + (2t)^2 2tdt$$

$$= \int_c^2 (2t^2 - 2 + 8t^3)\,dt$$

$$= \frac{2}{3}t^3 - 2t + 2t^4 \Big|_0^2 = \frac{100}{3}$$

Jadi, usaha yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya adalah $\frac{100}{3}$.

Integral Permukaan

PDAM merupakan penyalur resmi air bersih bagi masyarakat, terutama di daerah perkotaan. PDAM menyalurkan air bersih tersebut melalui pipa-pipa langsung ke perumahan penduduk. Air yang mengalir melalui pipa tersebut memiliki kecepatan. Untuk mengetahui volume air yang mengalir kita dapat menghitungnya menggunakan rumus debit air atau menggunakan prinsip integral permukaan. Volume air yang mengalir berbanding lurus dengan kecepatan aliran air. Semakin besar kecepatan yang dimiliki air tersebut, maka semakin besar pula volume air yang mengalir.

Mari kita tentukan volume air yang mengalir melalui pipa menggunakan prinsip integral permukaan. Misalkan v menyatakan kecepatan aliran air, maka volume dari fluida yang melewati dS dalam Δt detik sama dengan volume yang terkandung dalam silinder dengan luas alas dS dan tinggi (panjang pipa) $v\Delta t$. Jika dinyatakan dalam persamaan matematis, maka,

$$V = \iint_S \boldsymbol{v}.\boldsymbol{n}ds$$

Adalah integral permukaan S dari vektor $\boldsymbol{v}$

Definisi Integral Permukaan

Misalkan S suatu permukaan 2 sisi yang demikian mulus dan **n** adalah vektor normal satuan positif, maka fluks (massa yang mengalir per satuan waktu) dari **A** (*x, y, z*) melalui permukaan S adalah,

$$Fluks\ \vec{F} yang\ melintasi\ \mathrm{S} = \iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}dS$$

yang disebut integral permukaan.

Untuk menghitung integral permukaan akan lebih sederhana dengan memproyeksikan S pada salah satu bidang koordinat, kemudian menghitung integral lipat 2 dari proyeksinya.

Misalkan permukaan S memiliki proyeksi pada bidang xy, maka integral permukaan diberikan oleh

$$\iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\frac{dxdy}{|\mathbf{n}.\mathbf{k}|}$$

Sedangkan jika proyeksi pada bidang *xz*, maka integral permukaannya adalah,

$$\iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\frac{dxds}{|\mathbf{n}.\mathbf{j}|}$$

Dan proyeksi pada bidang yz, maka integral permukaan diberikan oleh:

$$\iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}dS = \iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\frac{dydz}{|\mathbf{n}.\mathbf{i}|}$$

Contoh Soal

1. Hitunglah $\iint_S \mathbf{A}.\,\mathbf{n}dS$ dimana $\mathbf{A} = 18z\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$, S adalah bagian dari bidang $2x + 3y + 6z = 6$ yang terletak pada oktan pertama dan **n** adalah normal satuan pada *S*.

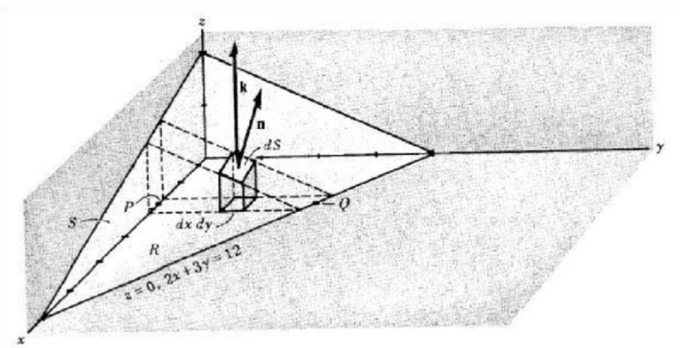
Penyelesaian

Suatu normal untuk S adalah $\nabla(2x+3y+6z-12) = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ sehingga

$$\mathbf{n} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} = \frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}$$

Maka

$$\begin{aligned}\mathbf{A}.\mathbf{n} &= [18z\mathbf{i}-12\mathbf{j}+3y\mathbf{k}].\left(\frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}\right)\\ &= \frac{36z-36+18y}{7}\\ &= \frac{36\left(\frac{12-2x-3y}{6}\right)-36+18y}{7}\\ &= \frac{36-12x}{7}\end{aligned}$$



Permukaan S proyeksi R nya terhadap bidang xy . Sehingga integral permukaan yang diinginkan adalah

$$\iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}ds = \iint_R \mathbf{A}.\mathbf{n}\frac{dxdy}{|\mathbf{n}.\mathbf{k}|}$$

$$= \iint_R \frac{36-12x}{7}\frac{dxdy}{\left|\left(\frac{2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}}{7}\right).\mathbf{k}\right|}$$

$$= \iint_R \frac{36-12x}{7}\frac{dxdy}{\left|\frac{6}{7}\right|}$$

$$= \int_{x=0}^{6}\int_{y=0}^{\frac{12-2x}{3}} (6-2x)\,dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{6} (6y-2xy)\,\Big|_0^{\frac{12-2x}{3}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} \left[6\left(\frac{12-2x}{3}\right) - 2x\left(\frac{12-2x}{3}\right)\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} \left[(24-4x) - \left(8x - \frac{4x^2}{3}\right)\right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{6} 24 - 12x + \frac{4x^2}{3} dx$$

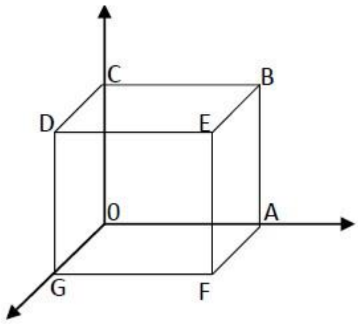
$$= 24x - 6x^2 + \frac{4x^3}{9}\,\Big|_0^6$$

$$= 24(6) - 6(6)^2 + \frac{4(6)^3}{9}$$

$$= 24$$

2. Hitunglah $\iint_S \mathbf{r}.\,\mathbf{n}ds$ melalui permukaan S dari kubus satuan yang dibatasi oleh bidang-bidang $x = 1, y = 1, z = 1$

Penyelesaian



Bidang *DEFG*: **n = i,** x=1, Maka

$$\iint_{DEFG} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \int_0^1\int_0^1 (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,.\,\mathbf{i}\,\frac{dydz}{|-\mathbf{i}.\mathbf{i}|}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 x\,dydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 dydz = 1$$

Bidang *ABCO*: **n = -i,** x = 0**,** Maka

$$\iint_{ABCO} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \int_0^1\int_0^1 (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,.\,(-\mathbf{i})\,\frac{dydz}{|-\mathbf{i}.\mathbf{i}|}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 -x\,dydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 0\,dydz = 0$$

Bidang *ABGF*: **n = j,** y=1**,** Maka

$$\iint_{ABGF} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \int_0^1\int_0^1 (x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})\,.\,(\mathbf{j})\,\frac{dxdz}{|\mathbf{j}.\mathbf{j}|}$$

$$= \int_0^1\int_0^1 y\,dxdz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 y\,dxdz = 1$$

Bidang *OGDC*: **n = -j**, y=0, Maka

$$\iint_{OGDC} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \int_0^1 \int_0^1 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).(-\mathbf{j}) \frac{dxdz}{|\mathbf{j}.\mathbf{j}|}$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 -y\, dxdz$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 0\, dxdz = 0$$

Bidang *BCDE*: **n = k**, z = 1, Maka

$$\iint_{BCDE} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \int_0^1 \int_0^1 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).(\mathbf{k}) \frac{dxdz}{|\mathbf{k}.\mathbf{k}|}$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 z\, dxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 dxdy = 1$$

Bidang *AFGO*: **n = -k**, z=0, Maka

$$\iint_{AFGO} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \int_0^1 \int_0^1 (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).(\mathbf{k}) \frac{dxdy}{|-\mathbf{k}.\mathbf{k}|}$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 -z\, dxdz$$
$$= \int_0^1 \int_0^1 0\, dxdzy = 0$$

$$\iint_S \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = \iint_{DEFG} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS + \iint_{ABCO} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS + \iint_{ABGF} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS + \iint_{OGDC} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS +$$
$$\iint_{BCDE} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS + \iint_{AFGO} \mathbf{r}.\mathbf{n}dS = 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + 0 = 3$$

Integral Volume

Banyaknya air yang dapat ditampung pada sebuah bak mandi atau tempat penampungan air selain dihitung menggunakan rumus volume juga dapat dihitung menggunakan integral volume.

Definisi Integral Volume

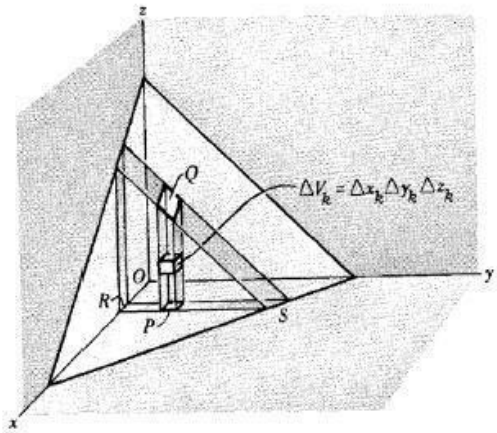
Pandang sebuah permukaan tertutup dalam ruang yang menutup volume V, maka

$$\iiint_V \mathbf{A}\, dV = \iiint_V \mathbf{A}\ dxdydz \qquad \text{dan} \qquad \iiint_V \phi dV = \iiint_V \phi\ dxdydz$$

$\iiint_V \phi dV$ dinyatakan sebagai limit dari jumlah.

Berikut penjelasannya:

Bagi ruang V ke dalam M buah kubus-kubus dengan volume $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ seperti diperlihatkan pada gambar berikut.



Misalkan (x_k, y_k, z_k) sebuah titik dalam kubus ini. Definisikan
$\phi(x_k, y_k, z_k) = \phi_k$

Pandang jumlah

$$\sum_{k=1}^{n} \phi_k \, \Delta V_k$$

yang diambil untuk semua kubus yang mungkin dalam ruang yang ditinjau.

Limit dari jumlah ini, bila $M \to \infty$ sehingga kuantitas-kuantitas terbesar ΔV_k akan mendekati nol, dan jika limit ini ada, dinyatakan oleh

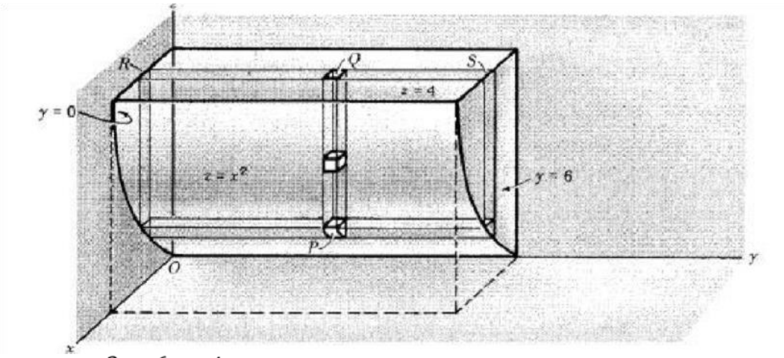
$$\boxed{\iiint_V \phi \, dV}$$

yang merupakan integral volume.

Contoh Soal

1. Misalkan $\boldsymbol{F} = 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$. Hitunglah $\iiint_V \mathbf{F}\ dV$ dimana V merupakan suatu ruang yang dibatasi oleh permukaan-permukaan $x = 0, y = 0, y = 6, z = x^2, z = 4$.

Penyelesaian



$$\iiint_V \mathbf{F}\ dV = \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\mathbf{i} - x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}\ \ dzdydx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\ \ dzdydx - \mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\ \ dzdydx$$

$$+\ \mathbf{j}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} y^2\ \ dzdydx$$

Integral untuk komponen **i**

$$\mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\ \ dzdydx = \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} xz^2\ |_{x^2}^{4}\ \ dydx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6} 16x - x^5\ \ dydx$$

$$= \mathbf{i}\int_{x=0}^{2} 16xy - x^5y\ |_0^6\ dx$$

$$= \mathbf{i} \int_{x=0}^{2} 96x - 6x^5 \, dx$$

$$= \mathbf{i}(48x^2 - x^5)|_0^2 = 128\,\mathbf{i}$$

Integral untuk komponen **j**

$$-\mathbf{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=x^2}^{4} x \ dzdydx = -\mathbf{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} xz^2 \,|_{x^2}^{4} \ dydx$$

$$= -\mathbf{j} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} 4x - x^3 \ dydx$$

$$= -\mathbf{j} \int_{x=0}^{2} 4xy - x^3y \,|_0^6 \, dx$$

$$= -\mathbf{j} \int_{x=0}^{2} 24x - 6x^3 \, dx$$

$$= -\mathbf{j}\left(12x^2 - \frac{6}{4}x^4\right)|_0^2 = -24\,\mathbf{j}$$

Integral untuk komponen **k**

$$\mathbf{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} \int_{z=x^2}^{4} y^2 \ dzdydx = \mathbf{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} y^2 z \,|_{x^2}^{4} \ dydx$$

$$= \mathbf{k} \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{6} 4y^2 - x^2y^2 \ dydx$$

$$= \mathbf{k} \int_{x=0}^{2} \frac{4}{3}y^2 - \frac{x^2y^3}{3} \ |_0^6 \, dx$$

$$= \mathbf{k} \int_{x=0}^{2} 288 - 12x^2 \, dx$$

$$= \mathbf{k}(288x - 24x^3)|_0^2 = 384\,\mathbf{k}$$

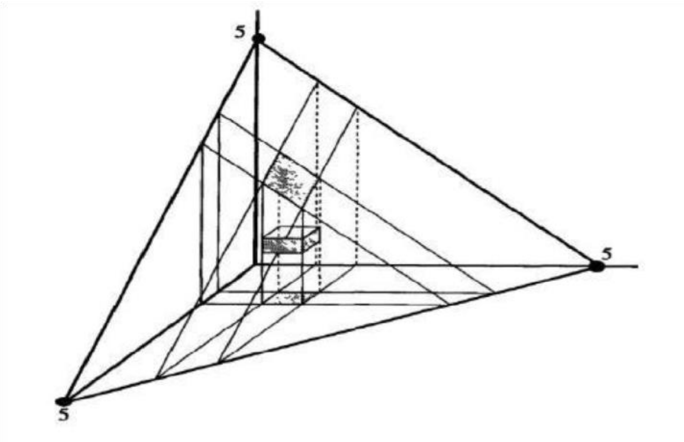
Maka

$$\iiint_V \mathbf{F}\, dV = \mathbf{i} \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} 2xz\ dzdydx - \mathbf{j} \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} x\ dzdydx$$

$$= \int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{6}\int_{z=x^2}^{4} y^2\ dzdydx$$

2. Hitung $\iiint_V f(x)dV$ dimana $f(x) = x^2 + y^2 + z^2$, V adalah ruang tertutup yang dibatasi oleh $x + y + z = 5, x = 0, y = 0, z = 0$

   Penyelesaian



$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\, dV = \int_{x=0}^{5}\int_{y=0}^{5-x}\int_{z=0}^{5-x-y} (x^2 + y^2 + z^2)\, dzdydx$$

$$= \int_{x=0}^{5} \int_{y=0}^{5-x} \left(x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3\right) |_0^{5-x-y} dydx$$

$$= \int_{x=0}^{5} \int_{y=0}^{5-x} \left[(x^2 + y^2)(5 - x - y) + \frac{(5 - x - y)^3}{3}\right] dydx$$

$$= \int_{x=0}^{5} \left[x^2(5 - x) - \frac{x^2 y^2}{2} + \frac{(5 - x)}{3} y^3 - \frac{y^4}{4} - \frac{(5 - x - y)^4}{12}\right] |_0^{5-x} dx$$

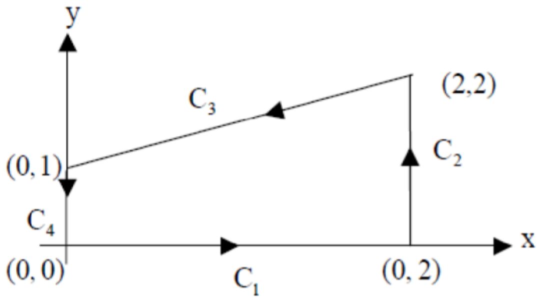
$$= \int_{x=0}^{5} \left[\frac{x^2(5 - x)^2}{2} + \frac{(5 - x)^4}{6}\right] dx$$

$$= \left(\frac{25x^3}{6} - \frac{5x^4}{4} + \frac{x^5}{10} - \frac{(5 - x)^5}{6}\right) |_0^5 = \frac{625}{4}$$

Jadi $\iiint_V \ f(x)\, dV = \frac{625}{4}$

Evaluasi

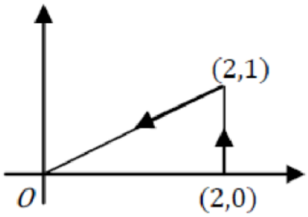
1. Tentukan $\int_c \quad F(r)\,.\,dr$ jika
   $F(r) = z\mathbf{i} + \mathbf{j} + y\mathbf{k}$
   C : $\mathrm{r}(\dagger) = cos\,\dagger\,\mathbf{i} + sin\,\dagger\,\mathbf{j} + cos\,\dagger\,\mathbf{k},\ 0 \le \dagger \le 2$
2. Tentukan $\int_c (x^2 + y^2 + z^2)^2\, dt$ jika
   C :$\mathrm{r}\,(\dagger) = cos\,\dagger\,\mathbf{i} + sin\,\dagger\,\mathbf{j} + 3\,\dagger\,\mathbf{k},\ 0 \le \dagger \le 2$
3. Tentukan $\int_c \quad F(r)\,.\,dr$ jika
   a. $F(r) = y^2\mathbf{i} - x^4\mathbf{j}$
      C :$\mathrm{r}\,(\dagger) = \dagger\,\mathbf{i} + \dagger^{-1}\mathbf{j},\ 1 \le \dagger \le 3$
   b. $F(r) = y^2\mathbf{i}$
      C : sepanjang kurva $x^2 + 4\mathrm{y} = 4$ dari (2,0) ke (0,1)
   c. $F(r) = 3y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$
      C : segmen garis lurus dari $(0,0)$ ke $\left(2,2\frac{1}{2}\right)$
4. Tentukan usaha yang dilakukan oleh harga F = xi – zj + 2yk yang bergerak sepanjang C : z = y4, x = 1; Dari (1,0,0) ke (1,1,1)
5. Tentukan $\oint_C y^2dx + x^2dy$: jika
   C : Lintasan trapezium seperti dalam gambar berikut



6. Jika $\mathbf{A} = (2x + 3)\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + (yz - x)\mathbf{k}.$ Hitunglah $\int_C \mathbf{A}.\,d\mathbf{r}$ sepanjang lintasan-lintasan C berikut!
   a. $x = 2t^2,\ y = t,\ z = t^3$ dari $t = 0$ hingga $t = 1$

b. garis-garis lurus dari (0, 0, 0) ke (0, 0, 1), kemudian ke (0, 1, 1) dan kemudian ke (2, 1, 1)
c. garis lurus yang menghubungkan (0, 0, 0) dan (2, 1, 1)

7. Jika $\mathbf{A} = (2x + y^2)\mathbf{i} + (3y - 4x)\mathbf{j}$ hitunglah $\oint_C \mathbf{F}.\,d\mathbf{r}$ mengelilingi segitiga C pada gambar berikut



8. Misalkan $\mathbf{A} = t\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + t\mathbf{j} - \mathbf{k}$ maka hitunglah $\int_1^2 \mathbf{A}.\mathbf{B} \times \mathbf{C}\ dt$!
9. Tentukan nilai dari $\int_2^3 \mathbf{A}.\frac{dA}{dt}\ dt$ jika $\mathbf{A}(2) = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ dan $\mathbf{A}(3) = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
10. Carilah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan sebuah partikel dalam medan gaya $\mathbf{F} = 3x^2\mathbf{i} + (2xz - y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ sepanjang
    a. garis lurus dari (0, 0, 0) ke (2, 1, 3)
    b. kurva ruang $x = 2t^2, y = t, z = 4t^2 - t$ dari t = 0 ke t = 1
    c. Kurva yang didefinisikan oleh $x^2 = 4y, 3x^2 = 8z$ dari $x = 0$ ke $x = 2$

Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi

Materi Pokok
1. Titik dalam Ruang Tiga Dimensi
2. Panjang Sebuah Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi
3. Besar Sudut Antara Tiga Vektor

URAIAN MATERI

Titik dalam ruang dimensi tiga

Ada beberapa cara menentukan letak suatu titik dalam ruang dimensi tiga. Cara-cara tersebut didasarkan pada penetapan patokan awal yang digunakan (sesuai kesepakatan). Dalam menentukan letak suatu titik, kita dapat menggunakan sistem koordinat kartesius siku-siku.

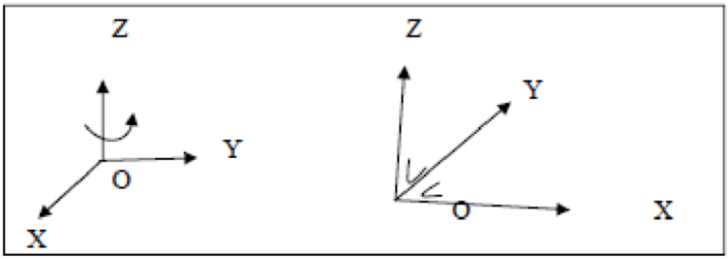
Patokan awal yang diambil dalam koordinat kartesius dimensi tiga adalah tiga garis lurus yang saling tegak lurus yang dinamakan sumbu x, sumbu y, dan sumbu z. Meskipun letak garis-garis yang saling tegak lurus ini dapat diambil sesuka hati kita, namun diambil berdasarkan kesepakatan. Misalnya sebagai berikut,

a. sumbu y diambil mendatar, arah ke kanan merupakan arah positif dan ke kiri merupakan arah negatif.
b. sumbu y dan sumbu z terletak pada kertas kita,
c. sumbu x tegak lurus pada kertas dan melalui titik potong sumbu y dan sumbu z. Sumbu x yang menuju kita sebagai arah positif dan arah lawannya sebagai arah negatif.

Vektor dalam ruang berdimensi tiga ditulis dengan R^3. Dimana R^3 ditandai dengan tiga buah sumbu yang saling berpotongan. Untuk memudahkan dalam perhitungan, dipilih tiga sumbu yang berpotongan saling tegak lurus (ortogonal) yang dikenal dengan:

1. Arah ke depan atau ke belakang disebut sumbu X;
2. Arah ke kanan atau ke kiri disebut sumbu Y; 3. Arah ke atas atau ke bawah disebut sumbu Z.

Seperti Gambar 5.1 (i). Kemudian sumbu koordinat seperti Gambar 5.1 (i) diputar ke kanan diperoleh sumbu koordinat Gambar 5.1 (ii).



Gambar 5.1 Vektor dalam ruang dimensi tiga

Letak suatu titik ditentukan oleh jarak titik itu ke bidang-bidang koordinat *yz, xz,* dan *xy,* serta dilihat apakah arah positif atau negatif. Pemberian nama pada suatu titik untuk ruang dimensi tiga dilakukan oleh pasangan tiga bilangan (*tripel*), misalnya titik *P(x, y, z).* Sumbu *x* disebut *absis*, sumbu *y* disebut *ordinat* dan sumbu *z* disebut *aplikat*. Setiap titik pada sumbu x, ordinat dan aplikatnya nol. Demikian juga titik yang terletak pada bidang *xy*. Sedangkan titik O(0, 0, 0) disebut titik asal. Vektor di ruang 3 adalah vektor yang mempunyai 3 buah sumbu yaitu *x,y,z* yang saling tegak lurus dan perpotongan ketiga sumbu sebagai pangkal perhitungan. Vektor p pada bangun ruang dapat dituliskan dalam bentuk :

Koordinat kartesius p = (x, y, z)

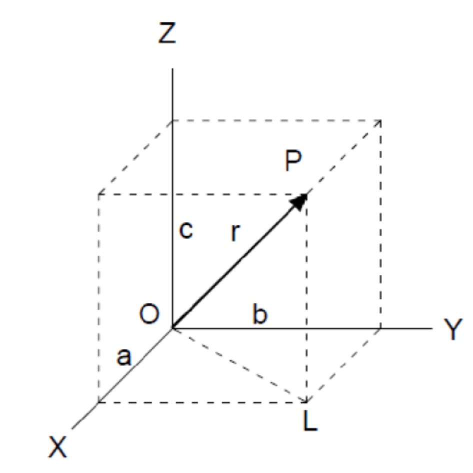
a. Vektor kolom $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ atau vektor baris p = (x, y, z)

b. Kombinasi linear vektor satuan i, j, k yaitu : p = xi + yj + zk, dengan $i = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ dimana i = vektor satuan

dalam arah OX, j = vektor satuan dalam arah OY dan k = vektor satuan dalam arah OZ

c. Pada Gambar 1.1, Vektor $\overline{OP}$ didefinisikan oleh komponen-komponennya, dimana
a di sepanjang OX b di
sepanjang OY c di
sepanjang Oz

Misalkan



Vektor $\vec{OP}$ didefinisikan oleh komponen-komponennya:

a sepanjang OX
$\vec{b}$ sepanjang OY
c sepanjang OZ

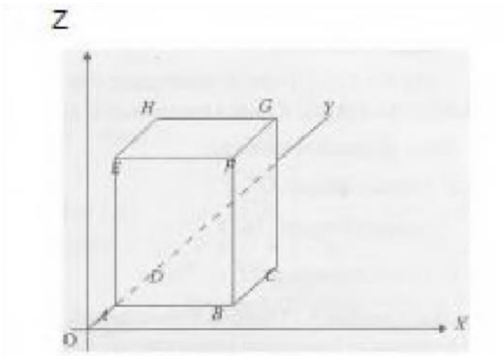
Misalkan
i = vektor satuan dalam arah OX
j = vektor satuan dalam arah OY
$\vec{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ

Maka
$\overline{OP} = a\,\boldsymbol{i} + \vec{b}\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$
$OL^2 = a^2 + b^2$ dan $OP^2 = OL^2 + c^2$
Sehingga $OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$
Jadi $r = a\,\boldsymbol{i} + \vec{b}\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$

Contoh

- ABCD.EFGH adalah sebuah balok dengan AB = 4; AD = 2; AE = 6, dan sisi-sisinya sejajar dengan sumbu koordinat dengan koordinat A (0, 1, 0), B (4, 1, 0), E(0, 1, 6), F (4, 1, 6), G (4, 3 6) H (0, 3, 6) dan titik koordinat lainnya dapat ditentukan (perhatikan Gambar 1.3.

Misalkan titik A (0, 1, 0) dituliskan sebagai $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan titik E (0,1,6) dituliskan sebagai $e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ maka $\overrightarrow{AE} = \vec{e} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

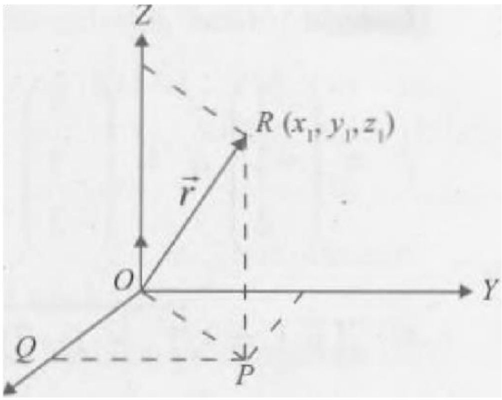


Dengan cara yang sama diperoleh

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix};\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Besar atau Panjang Sebuah Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi

Perhatikan Gambar



Gambar 5.2 Panjang vektor r di R^3

Posisi di R^3 seperti pada Gambar 1.4. Dengan menggunakan pythagoras, maka,

$$\left|\overrightarrow{OR}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PR}\right|^2$$
$$= \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{QP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PR}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{OR}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ perhatikan Gambar 1.4

$|\vec{r}| = \sqrt{X_1^{\,2} + Y_1^{\,2} + Z_1^{\,2}}$ karena $\overrightarrow{OR} = r$

Jadi $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, panjang vektor $|r| = \sqrt{X_1^{\,2} + Y_1^{\,2} + Z_1^{\,2}}$

Jika vektor tiga dimensi dinyatakan dalam arah ***i, j, k*** maka dituliskan dengan,

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

Sehingga besar vektor r dapat ditentukan dengan,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ini memberi kita suatu cara yang mudah dalam mencari magnitudo suatu vektor yang dinyatakan dalam suku-suku vektor satuannya.

Contoh

$\overline{PQ} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

Maka besar vektor $|\overline{PQ}| = \cdots$

Jawab

$|\overline{PQ}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}$

$|\overline{PQ}| = \sqrt{16 + 9 + 4}$

$|\overline{PQ}| = \sqrt{29}$

$|\overline{PQ}| = 5{,}385$

Sudut yang Dibentuk Tiga Vektor

Arah suatu vektor dalam tiga dimensi ditentukan oleh sudutsudut yang dibuat oleh vektor dengan ketiga sumbu acuannya. Perhatikan Gambar 1.2. Dari gambar tersebut misalkan dinyatakan bahwa vektor

$$\boxed{\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}}$$

Maka

$$\frac{a}{v} = cos\ \alpha \qquad \therefore a = v\ cos\ \alpha$$

$$\frac{b}{v} = cos\ \beta \qquad \therefore b = v\ cos\ \beta$$

$$\frac{c}{v} = cos\ \gamma \qquad \therefore c = v\ cos\ \gamma$$

Juga

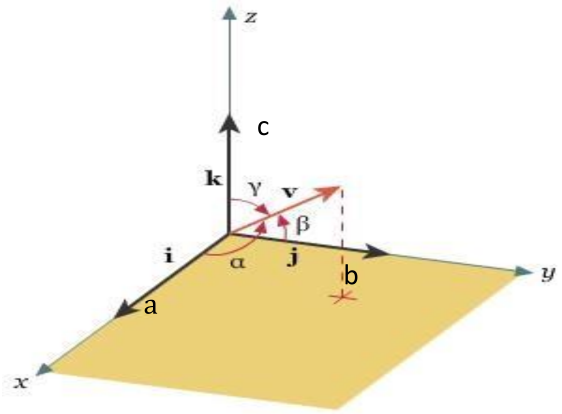
$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = v^2}$$

$\therefore v^2cos^2\alpha + v^2cos^2\beta + v^2cos^2\gamma = v^2 \therefore$
$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$

Jika

$l = cos\ \alpha$ $\qquad$ $n = cos\ \gamma$

$m = cos\ \beta$ $\qquad$ maka $l^2 + m^2 + n^2 = 1$



Gambar 5.3. Sudut pada vektor tiga dimensi

Perhatikan:

[*l, m, n*] yang ditulis dalam tanda kurung siku disebut *kosinus arah* vektor $\bar{v}$ dan merupakan nilai-nilai kosinus sudut-sudut yang dibuat vektor yang bersangkutan dengan ketiga sumbu acuannya. Jadi untuk vektor $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$

$$l = \frac{a}{v};\ m = \frac{b}{v};\ n = \frac{c}{v}\ \text{dan, tentu saja, } v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Contoh soal

- Carilah kosinus arah [*l, m, n*] dari vektor **v** = 3**i** – 2**j** + 6**k**

Jawab **v** = 3**i** – 2**j** + 6**k**

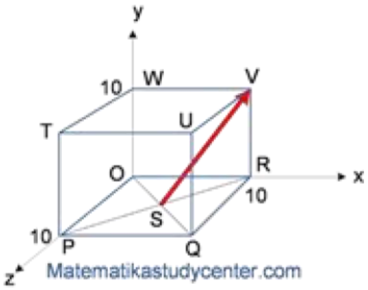
$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$ maka $v = \sqrt{9 + 4 + 36}$

$$\therefore v = \sqrt{49} = 7$$

$$\therefore l = \frac{3}{7}; m = -\frac{2}{7}; n = \frac{6}{7}$$

Evaluasi

1. Perhatikan gambar kubus dengan sisi sepanjang 10 satuan berikut:



   Titik S berada pada perpotongan kedua diagonal sisi alas kubus. Tentukan:
   a) Koordinat titik S
   b) Koordinat titik V
   c) Vektor SV dalam bentuk kolom
   d) SV dalam bentuk vektor satuan
   e) Panjang vektor SV

2. Diberikan dua buah vektor masing-masing a = 9 dan b = 4. Nilai cosinus sudut antara kedua vektor adalah 1/3 . Tentukan: a) |**a + b**| b) |**a – b**|

3. Dua buah vektor masing-masing: **p** = 3i + 2j + k **q** = 2i – 4 j + 5k
   Tentukan nilai cosinus sudut antara kedua vektor tersebut!

4. Besar sudut antara vektor **a** = 2i − j + 3k dan **b** = i + 3j − 2k adalah....

5. Ditentukan A(4 , 7 , 0) , B(6 , 10 , −6) dan C(1 , 9 , 0). **AB** dan **AC** wakil-wakil dari vektor **u** dan **v**. Besar sudut antara **u** dan **v** adalah....

6. Diberikan tiga buah vektor masing-masing:
   a) = 6p i + 2p j − 8 k **b** = −4 i + 8j + 10 k **c** = − 2 i + 3 j − 5 k
   Jika vektor **a** tegak lurus **b**, maka vektor **a** − **c** adalah.....

Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi

Materi Pokok

1. Titik dalam Ruang Tiga Dimensi
2. Panjang Sebuah Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi
3. Besar Sudut Antara Tiga Vektor

URAIAN MATERI

Titik dalam ruang dimensi tiga

Ada beberapa cara menentukan letak suatu titik dalam ruang dimensi tiga. Cara-cara tersebut didasarkan pada penetapan patokan awal yang digunakan (sesuai kesepakatan). Dalam menentukan letak suatu titik, kita dapat menggunakan sistem koordinat kartesius siku-siku.

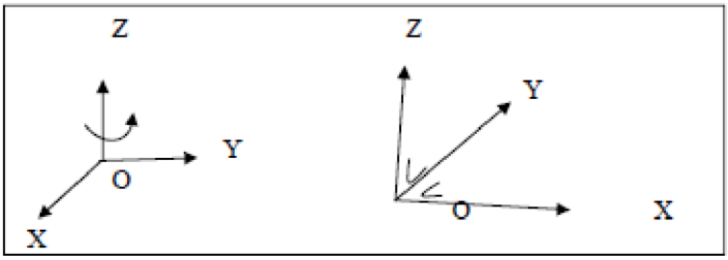
Patokan awal yang diambil dalam koordinat kartesius dimensi tiga adalah tiga garis lurus yang saling tegak lurus yang dinamakan sumbu x, sumbu y, dan sumbu z. Meskipun letak garis-garis yang saling tegak lurus ini dapat diambil sesuka hati kita, namun diambil berdasarkan kesepakatan. Misalnya sebagai berikut,

a. sumbu y diambil mendatar, arah ke kanan merupakan arah positif dan ke kiri merupakan arah negatif.
b. sumbu y dan sumbu z terletak pada kertas kita,
c. sumbu x tegak lurus pada kertas dan melalui titik potong sumbu y dan sumbu z. Sumbu x yang menuju kita sebagai arah positif dan arah lawannya sebagai arah negatif.

Vektor dalam ruang berdimensi tiga ditulis dengan R^3. Dimana R^3 ditandai dengan tiga buah sumbu yang saling berpotongan. Untuk memudahkan dalam perhitungan, dipilih tiga sumbu yang berpotongan saling tegak lurus (ortogonal) yang dikenal dengan:

1. Arah ke depan atau ke belakang disebut sumbu X;
2. Arah ke kanan atau ke kiri disebut sumbu Y; 3. Arah ke atas atau ke bawah disebut sumbu Z.

Seperti Gambar 5.1 (i). Kemudian sumbu koordinat seperti Gambar 5.1 (i) diputar ke kanan diperoleh sumbu koordinat Gambar 5.1 (ii).



Gambar 5.1 Vektor dalam ruang dimensi tiga

Letak suatu titik ditentukan oleh jarak titik itu ke bidang-bidang koordinat *yz, xz,* dan *xy,* serta dilihat apakah arah positif atau negatif. Pemberian nama pada suatu titik untuk ruang dimensi tiga dilakukan oleh pasangan tiga bilangan (*tripel*), misalnya titik *P(x, y, z).* Sumbu *x* disebut *absis*, sumbu *y* disebut *ordinat* dan sumbu *z* disebut *aplikat*. Setiap titik pada sumbu x, ordinat dan aplikatnya nol. Demikian juga titik yang terletak pada bidang *xy*. Sedangkan titik O(0, 0, 0) disebut titik asal. Vektor di ruang 3 adalah vektor yang mempunyai 3 buah sumbu yaitu *x,y,z* yang saling tegak lurus dan perpotongan ketiga sumbu sebagai pangkal perhitungan. Vektor p pada bangun ruang dapat dituliskan dalam bentuk :

Koordinat kartesius p = (x, y, z)

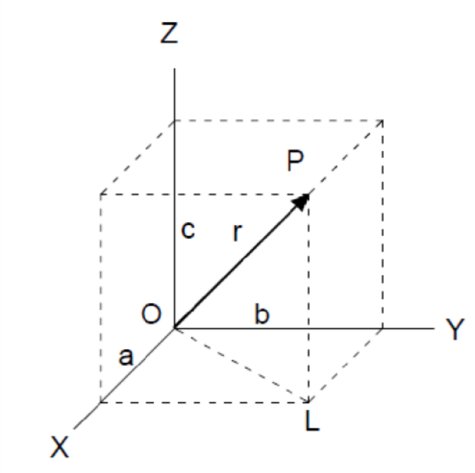
a. Vektor kolom $p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ atau vektor baris p = (x, y, z)

b. Kombinasi linear vektor satuan i, j, k yaitu : p = xi + yj + zk, dengan $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dimana i = vektor satuan

dalam arah OX, j = vektor satuan dalam arah OY dan k = vektor satuan dalam arah OZ

c. Pada Gambar 1.1, Vektor $\overline{OP}$ didefinisikan oleh komponen-komponennya, dimana
a di sepanjang OX b di
sepanjang OY c di
sepanjang Oz

Misalkan



Vektor $\vec{OP}$ didefinisikan oleh komponen-komponennya:

a sepanjang OX
$\vec{b}$ sepanjang OY
c sepanjang OZ

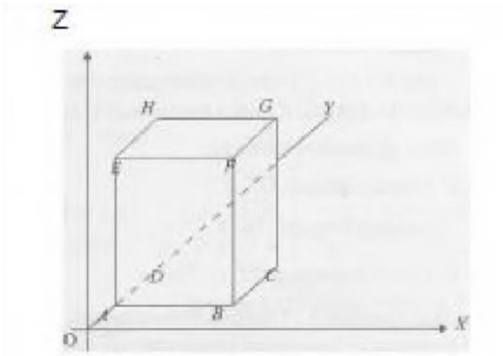
Misalkan
i = vektor satuan dalam arah OX
j = vektor satuan dalam arah OY
$\vec{k}$ = vektor satuan dalam arah OZ

Maka
$\overline{OP} = a\,\boldsymbol{i} + \vec{b}\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$
$OL^2 = a^2 + b^2$ dan $OP^2 = OL^2 + c^2$
Sehingga $OP^2 = a^2 + b^2 + c^2$
Jadi $r = a\,\boldsymbol{i} + \vec{b}\,\boldsymbol{j} + c\,\boldsymbol{k}$

Contoh

- ABCD.EFGH adalah sebuah balok dengan AB = 4; AD = 2; AE = 6, dan sisi-sisinya sejajar dengan sumbu koordinat dengan koordinat A (0, 1, 0), B (4, 1, 0), E(0, 1, 6), F (4, 1, 6), G (4, 3 6) H (0, 3, 6) dan titik koordinat lainnya dapat ditentukan (perhatikan Gambar 1.3.

Misalkan titik A (0, 1, 0) dituliskan sebagai $a = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan titik E (0,1,6) dituliskan sebagai $e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ maka $\overrightarrow{AE} = \vec{e} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

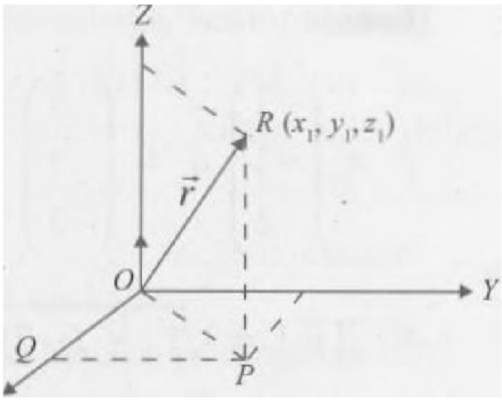


Dengan cara yang sama diperoleh

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix};\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Besar atau Panjang Sebuah Vektor dalam Ruang Tiga Dimensi

Perhatikan Gambar



Gambar 5.2 Panjang vektor *r* di R^3

Posisi di R^3 seperti pada Gambar 1.4. Dengan menggunakan pythagoras, maka,

$$\left|\overrightarrow{OR}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PR}\right|^2$$
$$= \left|\overrightarrow{OQ}\right|^2 + \left|\overrightarrow{QP}\right|^2 + \left|\overrightarrow{PR}\right|^2$$

$\left|\overrightarrow{OR}\right|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ perhatikan Gambar 1.4

$|\vec{r}| = \sqrt{X_1^{\ 2} + Y_1^{\ 2} + Z_1^{\ 2}}$ karena $\overrightarrow{OR} = r$

Jadi $\vec{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$, panjang vektor $|r| = \sqrt{X_1^{\ 2} + Y_1^{\ 2} + Z_1^{\ 2}}$

Jika vektor tiga dimensi dinyatakan dalam arah ***i, j, k*** maka dituliskan dengan,

$$\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

Sehingga besar vektor *r* dapat ditentukan dengan,

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ini memberi kita suatu cara yang mudah dalam mencari magnitudo suatu vektor yang dinyatakan dalam suku-suku vektor satuannya.

Contoh

$\overline{PQ} = 4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

Maka besar vektor $|\overline{PQ}| = \cdots$

<u>*Jawab*</u>

$\overline{|PQ|} = \sqrt{4^2 + 3^2 + 2^2}$

$\overline{|PQ|} = \sqrt{16 + 9 + 4}$

$\overline{|PQ|} = \sqrt{29}$

$\overline{|PQ|} = 5{,}385$

Sudut yang Dibentuk Tiga Vektor

Arah suatu vektor dalam tiga dimensi ditentukan oleh sudutsudut yang dibuat oleh vektor dengan ketiga sumbu acuannya. Perhatikan Gambar 1.2. Dari gambar tersebut misalkan dinyatakan bahwa vektor

$$\boxed{\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}}$$

Maka

$$\frac{a}{v} = \cos\alpha \qquad \therefore a = v\cos\alpha$$
$$\frac{b}{v} = \cos\beta \qquad \therefore b = v\cos\beta$$
$$\frac{c}{v} = \cos\gamma \qquad \therefore c = v\cos\gamma$$

Juga

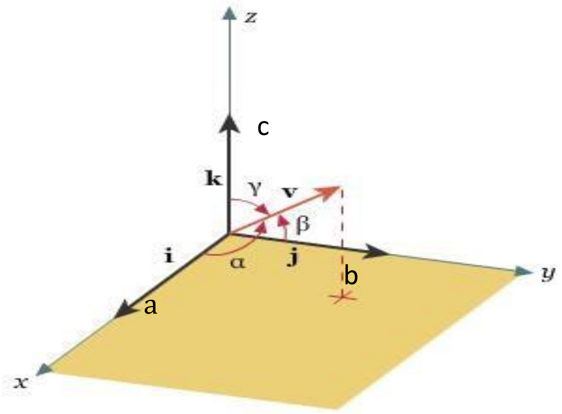
$$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 = v^2}$$

$\therefore v^2\cos^2\alpha + v^2\cos^2\beta + v^2\cos^2\gamma = v^2 \therefore$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Jika

$l = cos\,\alpha \qquad n = cos\,\gamma$

$m = cos\,\beta \qquad$ maka $l^2 + m^2 + n^2 = 1$



Gambar 5.3. Sudut pada vektor tiga dimensi

Perhatikan:

[l, m, n] yang ditulis dalam tanda kurung siku disebut *kosinus arah* vektor $\bar{v}$ dan merupakan nilai-nilai kosinus sudut-sudut yang dibuat vektor yang bersangkutan dengan ketiga sumbu acuannya. Jadi untuk vektor $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$

$l = \frac{a}{v}$; $m = \frac{b}{v}$; $n = \frac{c}{v}$ dan, tentu saja, $v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Contoh soal

- Carilah kosinus arah [l, m, n] dari vektor **v** = 3**i** – 2**j** + 6**k**

Jawab **v** = 3**i** – 2**j** + 6**k**

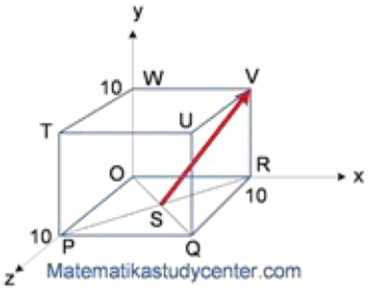
$\therefore a = 3, b = -2, c = 6$ maka $v = \sqrt{9 + 4 + 36}$

$\therefore v = \sqrt{49} = 7$

$\therefore l = \frac{3}{7}; m = -\frac{2}{7}; n = \frac{6}{7}$

Evaluasi

1. Perhatikan gambar kubus dengan sisi sepanjang 10 satuan berikut:



Titik S berada pada perpotongan kedua diagonal sisi alas kubus. Tentukan:

a) Koordinat titik S
b) Koordinat titik V
c) Vektor SV dalam bentuk kolom
d) SV dalam bentuk vektor satuan
e) Panjang vektor SV

2. Diberikan dua buah vektor masing-masing a = 9 dan b = 4. Nilai cosinus sudut antara kedua vektor adalah 1/3 . Tentukan: a) |**a + b**| b) |**a – b**|

3. Dua buah vektor masing-masing: **p** = 3i + 2j + k **q** = 2i – 4 j + 5k Tentukan nilai cosinus sudut antara kedua vektor tersebut!

4. Besar sudut antara vektor **a** = 2i – j + 3k dan **b** = i + 3j – 2k adalah....

5. Ditentukan A(4 , 7 , 0) , B(6 , 10 , −6) dan C(1 , 9 , 0). **AB** dan **AC** wakil-wakil dari vektor **u** dan **v**. Besar sudut antara **u** dan **v** adalah....

6. Diberikan tiga buah vektor masing-masing:
   a) = 6p i + 2p j − 8 k **b** = −4 i + 8j + 10 k **c** = − 2 i + 3 j − 5 k
   Jika vektor **a** tegak lurus **b**, maka vektor **a** − **c** adalah.....

Medan Skalar dan Medan Vektor

Materi Pokok

1. Integral Biasa
2. Integral Garis
3. Integral Bidang
4. Integral Volume

URAIAN MATERI

Sebelum memahami lebih jauh mengenai integral garis, bidang dan volume, maka kita terlebih dahulu harus memahami tentang integral biasa dari sebuah fungsi vektor.

1. Ruang Vektor

Sebelum sampai pada definisi ruang vektor secara abstrak, lebih dulu diperkenalkan pengertian lapangan (*field*). *Field* adalah suatu sistem aljabar dengan dua operasi yaitu “addisi” (dinotasikan +) dan “multiplikasi” (dinotasikan .), yang memenuhi aturan berikut ini:

1. Terhadap addisi:
   a. Tertutup
   b. Assosiatif
   c. Terdapat elemen netral
   d. Setiap elemen mempunyai invers
   e. Komutatif
2. Terhadap multiplikasi:
   a. Tertutup
   b. Assosiatif
   c. Terdapat elemen satuan
   d. Setiap elemen tak nol mempunyai invers
   e. Komutatif

Beberapa struktur aljabar yang merupakan *field* yang sering dijumpai yaitu:

a. (ℝ,+, .) merupakan himpunan bilangan riil terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan riil.

b. (ℂ, +, .) merupakan himpunan bilangan kompleks terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan kompleks.

c. (ℚ, +, .) merupakan himpunan bilangan rasional terhadap penjumlahan dan perkalian bilangan rasional.

Diberikan himpunan tak kosong V bersama dengan suatu operasi $\oplus$ pada V. Diberikan *field* (ℝ , +, .), operasi perkalian skalar $\odot : \mathbb{R} \times V \to V$. Maka dapat dikatakan bahwa, himpunan V disebut ruang vektor atas ℝ terhadap oeprasi perkalian skalar $\odot$ jika memenuhi aksiomaaksioma berikut ini:

1. □□*u*,*v*□*V*□*u*□*v*□*V*	6. □□ℝ, *u*□*V*□□*u*□*V*
2. □□*u*,*v*□*V*□*u*□*v*□*v*□*u*	7. □,□□ℝ, *u*□*V*□□□□□*u*□□*u*□□*u*
3. □□*u*,*w*□*V*□*u*□□*v*□*w*□□□*u*□*v*□□*w*	8. □□ℝ, *u*,□*V*□□□*u*□*v*□□□*u*□□*v*
4. □□0□*V*□□□*v*□*V*□0 □*v*□*v*□ 0–□*v*	9. □,□□ℝ, *u*□*V*□□□□*u*□□□□□□*u*
5. □□*u*□*V*□□□□□*u*□□*V*□*u*□□□*u*□□ 0	10. 1.*u*□*u*

Contoh:

- Buktikan bahwa $\mathbb{R}^2$ merupakan ruang vektor terhadap operasi penjumlahan skalar!

  Penyelesaian

  a. Ambil sebarang (x_1, y_1), (x_2, y_2) berlaku $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2) \in \mathbb{R}^2$

$\in \mathbb{R} \quad \in \mathbb{R}$

b. Sifat Komutatif

$$
\begin{aligned}
(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &= (x_1+x_2, y_1+y_2) \\
&= (x_2+x_1, y_2+y_1) \\
&= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)
\end{aligned}
$$

c. Sifat Asosiatif

$$
\begin{aligned}
[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] + (x_3, y_3) &= (x_1+x_2, y_1+y_2)+(x_3 + y_3) \\
&= (x_2+x_1+x_3, y_1+ y_2+y_3) \\
&= (x_1, y_2) + (x_2, x_3+ y_2+ y_3) \\
&= (x_1, y_2) + [(x_2, y_2)+ (x_3, y_3)]
\end{aligned}
$$

d. Ada elemen identitas

□0,□□x_1, y_1□berlaku□x_1, y_1□□ 0 □ □x_1, y_1□

□x_1, y_1□□ 0 □ □x_1, y_1□

0 □ □x_1, y_1□□□x_1, y_1□□ □x_1 □x_1, y_1 □y_1□□ □0,0□

Jadi terdapat 0 □ □0,0□ sehingga □x_1, y_1□□ 0 □ □x_1, y_1□

e. Ada elemen invers

□□x_1, y_1□,□p□ $\mathbb{R}^2$ berlaku □x_1, y_1□□ p□ 0

□x_1, y_1□□ p□ 0

□x_1, y_1□□ p□ 0

p□□0,0□□□x_1, y_1□

p□□0□x_1,0□y_1□□□□x_1,□y_1□

Jadi □□x_1, y_1□,□□□x_1,□y_1□belaku □x_1, y_1□□□□x_1,□y_1□□ 0

Sifat a – e merupakan grup **SIFAT KOMUTATIF** terhadap penjumlahan

2. Vektor Bebas Linier dan Bergantung Linier

Definisi 1

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ disebut bebas linier (*linierly independent*) apabila $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = 0$ hanya terpenuhi oleh $c_1 = c_2 = c_m = 0$

Definisi 2

Himpunan m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ disebut bergantung linier (*linierly dependent*) apabila *terdapat* c_1, c_2, c_m yang tidak sama dengan nol, sedemikian hingga $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_mu_m = 0$

Teorema 1

Jika himpunan bagian dari m buah vektor $\{u_1, u_2, \ldots u_m\}$ bergantung linier maka keseluruhan m buah vektor tersebut **bergantung linier.**

Bukti

- Ambil sembarang p vektor, sehingga p < m bergantung linier, katakan $u_1, u_2, \dots, u_p$, maka akan terdapat skalar-skalar $c_1, c_2, \dots, c_p$, sedemikian hingga $c_1u_1 + c_1u_1 + \dots + c_1u_1 = 0$
- Ambil kemudian $c_{p+1} = c_{p+2} = c_m = 0$, sehingga menjadi $c_1u_1 + c_1u_1 + \dots + c_pu_p + c_{p+1}u_{p+1} + \dots + c_mu_m = 0$ sehingga akan terdapat $c \neq 0$ (c antara $c_1, c_2, \dots, c_p$) , jadi m vektor tersebut bergantung linier.

<u>Teorema 2</u>

Jika himpunan m vektor $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ adalah bebas limier maka himpunan bagiannya juga bebas linier

<u>Bukti</u>

- Andaikan himpunan bagian tersebut bergantung linier, menurut teorema 1 keseluruhan m vektor adalah bergantung linier. Suatu kontradiksi, jadi pengandaian tidak benar, haruslah himpunan bagian tersebut bebas linier.

Definisi 3

> Jika b dapat dinyatakan sebagai $b = \gamma_1u_1 + \gamma_1u_1 + \dots + \gamma_1u_1$, maka b disebut suatu kombinasi linier dari $u_1, u_2, \dots, u_n$

Teorema 3

Jika satu dari vektor-vektor $u_1, u_2, \dots, u_n$ merupakan kombinasi linier dari yang lain maka vektor-vektor $u_1, u_2, \dots, u_n$ bergantung linier.

<u>Bukti</u>

- Misalkan $u_1 = \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3 + \dots + \gamma_nu_n$, maka $-u_1 + \gamma_2u_2 + \gamma_3u_3 + \dots + \gamma_nu_n = 0$. Hal ini menyatakan bahwa vektor-vektor itu bergantung linier.karena ada kofisien u yang tidak sama dengan nol atau ada konstanta yang $\neq 0$.

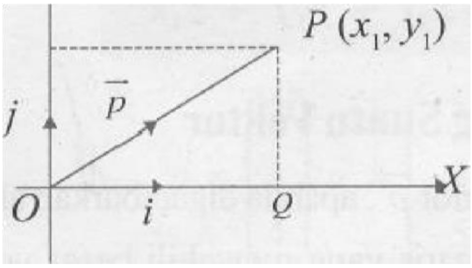
3. Vektor Basis

a. Vektor Basis di R^2

Diberikan titik P (x1, y1) seperti tampak pada Gambar 5.14. *OP* merupakan titik terminal/ujung dari vektor posisi yang titik pangkalnya di pusat koordinat. Dari gambar tampak bahwa:

$\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP}$ dimana $\vec{OP} = \vec{P}$, $\vec{OQ} = x_1 i$, $\vec{QP} = y_1 j$

sehingga dapat dituliskan $\vec{P} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$. Bentuk vektor ini disebut *vektor basis i* dan *j.*



Gambar 6.1. Vektor basis pada R^2

Jadi, setiap vektor di R^2 dapat disajikan sebagai *kombinasi linier* dari dua vektor basis i dan j dalam bentuk

$$\boxed{\vec{P} = x_1 i + y_1 j}$$

x_1 dan y_1 berturut-turut disebut *komponen-komponen mendatar* dan *vertikal* dari vektor P.

catatan

Vektor dapat disajikan dalam bentuk

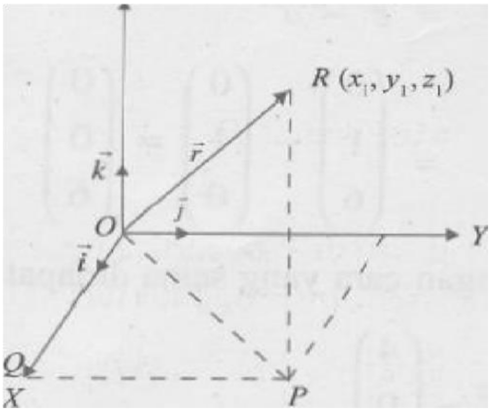
a. Vektor basis, yaitu $\vec{P} = (x_1, y_1)$

b. Vektor kolom, yaitu $\vec{P} = \binom{x_1}{y_1}$

b. Vektor Basis di *R*3

Jika R (x_1, y_1, z_1) adalah sembarang titik dan r adalah vektor posisi R, maka komponen komponen r dapat dinyatakan sebagai:

$x_1\vec{i}$(searah denganOX)
$y_1\vec{j}$(searah dengan OY)
$z_1\vec{k}$ (searah dengan OZ)



Gambar 6.2 Vektor basis pada R^3

Dari Gambar 1.11 tampak bahwa bentuk vektor ini merupakan kombinasi linear dari vektor – vektor basis $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$

$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PR}$ sehingga

$$\overrightarrow{OR} = \vec{r} = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k}$$

$$\boxed{r = x_1 i + y_1 j + z_1\vec{k}}$$

Jadi, setiap vektor F dalam ruang (di R^3) dapat disajikan sebagai kombinasi linear dari tiga vektor basis i , j , dan k yang tidak sebidang dalam bentuk:

catatan

Sebuah vektor dapat disajikan dalam bentuk

a. Vektor basis, yaitu $r = (x_1, y_1, z_1)$

b. Vektor kolom, yaitu $r = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

Evaluasi

1. Selidikilah apakah himpunan berikut membentuk ruang vektor bentuk operasi jumlah dan perkalian yang didefinisikan!
   a. Himpunan $A = \{(x, y) \in R^2 | x + y = 0\}$ dengan definisi
      $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$
      $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$
   b. Himpunan A^2dengan definisi
      $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y')$
      $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

2. Diberikan $M_2(R) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \ \in R\right\}$. Buktikan bahwa *$M_2(R)$* merupakan ruang vektor !

3. Buktikan $R^3 = \{(x, y, z)|x, y, z \in R\}$ merupakan ruang vektor atas R !

4. Buktikan $C = \left\{x + yi | x, y \in R, i = \sqrt{-1}\right\}$ merupakan ruang vektor atas R.

7 Persamaan Garis Pada Vektor

Persamaan Garis Pada Vektor

Materi Pokok

1. Persamaan Garis Lurus
2. Integral Garis
3. Integral Bidang
4. Integral Volume

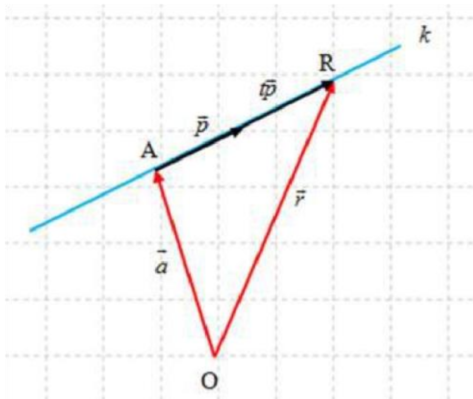
URAIAN MATERI

Persamaan Vektor dalam Persamaan Garis Lurus

Pada ilustrasi Gambar 1.7, tampak bahwa garis k melalui titik A dengan arah vektor p, dimana $\bar{p}$ bukanlah vektor nol. Karena titik R terletak pada garis k, maka perpindahan vektor $\overline{AR}$ merupakan kelipatan dari vektor $\bar{p} \rightarrow \overline{AR} = t\bar{p}$.

Selanjutnya, dengan memperhatikan arah vektor, kita peroleh hubungan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= \overrightarrow{OR} \\
&= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AR} \\
&= \vec{a} + t\vec{p}
\end{aligned}
$$



Gambar 7.1 Ilustrasi persamaan vektor

Pada kalian ketahui, $\vec{a}$ adalah vektor possi dari titik A dan t adalah skalar yang menyatakan rasio perpindahan vektor $\overrightarrow{AR}$ terhadap $\vec{p}$ (faktor pengali). Persamaan vektor dari sebuah garis yang melali titik

A dengan arah vektor $\vec{p}$ adalah $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{p}$

Contoh Soal

- Tentukan persamaan vektor dari sebuah garis yang melalui titik $A(1,2)$ dengan gradien $m = \frac{4}{5}$

  Penyelesaian

  Oleh karena gradien garis adalah $m = \frac{4}{5}$ maka $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{5}$. Akibatnya arah vektor $\vec{p} = \binom{5}{4}$.

  Dengan demikian, persamaan vektor dari garis yang dimaksud adalah

  $$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{p}$$

  $$\binom{x}{y} = \binom{1}{2} + t\binom{5}{4}$$

$$\binom{x}{y} = \binom{1+5t}{2+4t}$$

Berdasarkan uraian di atas maka

- $x=1+5t$
- $y=2+4t$

Jika kita eliminasi variabel t dari sistem persamaan di atas, maka kita peroleh persamaan garis $4x-5y = -6$. Jadi, persamaan vektor dari sebuah garis yang melalui titik $A(1,2)$ dengan gradien $m=\frac{4}{5}$ adalah $4x-5y = -6$.

Tentukan persamaan vektor dari garis $2x+3y=12$.

Penyelesaian

Langkah 1: menentukan gradien garis

Oleh karena gradien garis $ax + by = c$ adalah $m = -\frac{a}{b}$, maka gradien garis $2x+3y=12$ adalah $m = -\frac{2}{3}$

Langkah 2: menentukan arah vektor

Oleh karena $m = -\frac{2}{3}$ maka $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{3}$. Akibatnya arah vektor adalah $\vec{p} = \binom{-3}{2}$

Langkah 3: menentukan titik yangn terletak pada garis

Oleh karena $2(3) + 3(2) = 12$, maka titik $A(3,2)$ terletak pada garis $2x + 3y = 12$

Langkah 4: menentukan persamaan vektor dari garis $2x + 3y = 12$

$$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{p}$$

$$= \binom{3}{2} + t\binom{-3}{2}$$

Jadi persamaan vektor dari garis $2x + 3y = 12$ adalah $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

- Tentukan koordinat titik potong antara garis $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ dan $\vec{r} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Penyelesaian

Oleh karena

- $\vec{r} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + m\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+2m\\4+m\end{pmatrix}$
- $\vec{r} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} + n\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+3n\\2+4n\end{pmatrix}$

Maka

- $3 + 2m = 4 + 3n \Leftrightarrow 2m - 3n = 1$
- $4 + \mathrm{m} = 2 + 4n \Leftrightarrow m - 4n = -2$

Jika menggunakan metode elimanasi dan subtitusi, maka kita peroleh bahwa $m = 2$ dan $n = 1$

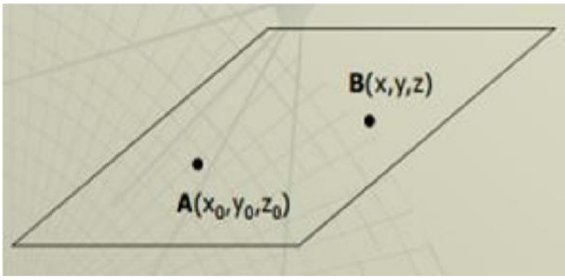
Dengan demikian

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}3+2m\\4+m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+4\\4+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix}3+3n\\2+4n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4+3\\2+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$$

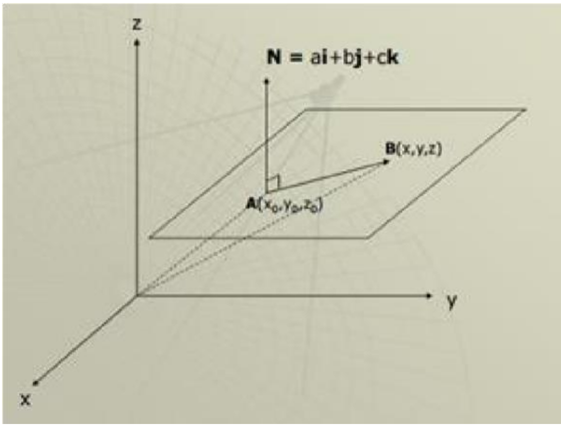
Jadi koordinat titik potong yang dimaksud adalah (7,6)

Persamaan Vektor dalam Persamaan Bidang Datar



Gambar 7.2. Vektor pada bidang datar

Pada Gambar 1.8 terdapat dua buah titik dalam bidang, yaitu titik **A** dan **B.** Kita akan susun persamaan bidang vektor yang menghubungkan titik **A** dan **B**, yang digambarkan seperti Gambar 1.9.



Gambar 7.3. Vektor yang tegak lurus bidang

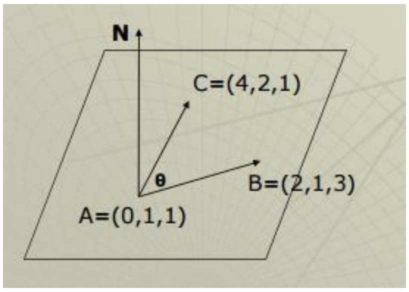
- $\boldsymbol{AB} = (B-A) = (x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}$, adalah vektor yang menghubungkan titik A dan B.
- $\boldsymbol{N} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ adalah vektor tegak lurus bidang (disebut vektor normal bidang) yaitu vektor yang menunjukkan arah bidang di titik A.

- Untuk menentukan persamaan bidang dapat dilakukan dengan langkah,
  1. Lakukan dot product antara **AB** dan **N**
  2. **N . (AB)** = N AB cos 90º = 0
  3. (a**i** + b**j** + z**k**) . [(x – x_o)**i** + (y – y_o)**i** +(z – z_o)**i**] = 0
  4. a(x – x_o) + b(y – y_o) + c(z – z_o) **=** 0
  5. ax + by + cz **=** ax_o + by_o + cz_o

Contoh Soal

Tentukan persamaan bidang yang mencakup 3 titik A=(0,1,1); B=(2,1,3); C=(4,2,1)

Penyelesaian



AB = B – A | **AC** = C - A
AB = (2, 1, 3) – (0, 1, 1) | **AC** = (4, 2, 1) – (0, 1, 1)
AB = (2, 0, 0) | **AC** = (4, 1, 0)

N = AB x AC
N = (2, 0, 0) x (4,1,0)

N

$$= \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} i & j & k \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -2\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Maka diperoleh a = -2; b = 8; c = 2

Untuk menentukan persamaan bidang vektor tersebut langkah selanjutnya,

- Tinjau titik **A =** (0,1,1)

  Sehingga $x_o = 0$; $y_o = 1$; $z_o = 1$

- Dengan demikian persamaan bidang tersebut adalah $ax + by + cz = ax_o + by_o + cz_o$

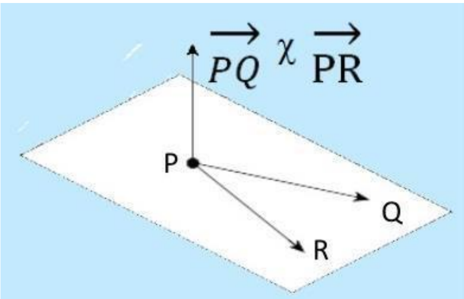
$$\begin{aligned} -2x + 8y + 2z &= -2(0) + 8(1) + 2(1) \\ &= 8 + 2 \\ &= 10 \\ -x + 4y + z &= 5 \end{aligned}$$

Jadi persamaan bidang tersebut adalah $-x + 4y + z = 5$

Evaluasi

1. Persamaan vektor dari sebuah garis yang melalui titik $A(2,4)$ dengan arah vektor $\vec{p} = \binom{-1}{3}$ adalah ...
2. Tentukan persamaan vektor dari garis x - 2y = 4 !
3. Tentukan koordinat titik potong antara garis $\vec{r} = \binom{3}{4} + m\binom{1}{4}$ dan $\vec{r} = \binom{3}{2} + m\binom{1}{2}$!
4. Tentukan persamaan vektor dari sebuah garis yang melalui titik A (3,-1) dengan gradien $m = -\frac{2}{3}$!
5. Tentukan persamaan bidang yang melalui titik (3, -1, 4) dan memiliki normal vektor (2, 5, -3)!

Carilah persamaan bidang yang terdiri dari titik P (1, 0, -3), Q (2, -5, 6) dan R (6, 3, -4)



6. Tentukan persamaan bidang V_2 yang sejajar dengan bidang V_1 = x + y + 5z = 9 dan bidang V_2 melalui titik (0, 2, 1) !
7. Tentukan apakah bidang – bidang x – y – 3z = 5 dan 2x – y + z = 1 tegak lurus !
8. Tentukan vektor normal dan persamaan bidang yang melalui garis r = (2-t, 3+4t, -1-2t) dan titik (5, -2, 7) !
9. Tentukan persamaan bidang V_2 yang tegak lurus pada bidang V_1 = x + y + z = 1 serta melalui titik (0, 0, 0) dan (1, 1, 0) !

10. Cari persamaan bidang melalui (-2, 1, 5) yang tegak lurus bidang $4x - 2y + 2z + 1 = 0$ dan $3x + 3y - 6z = 5$!

Gradien, Difergensi, Curl

Materi Pokok
1. Operator Dell
2. Operator Divergensi
3. Operator Curl

URAIAN MATERI

Sebelum memahami lebih jauh mengenai integral garis, bidang dan volume, maka kita terlebih dahulu harus memahami tentang integral biasa dari sebuah fungsi vektor.

Operator Del

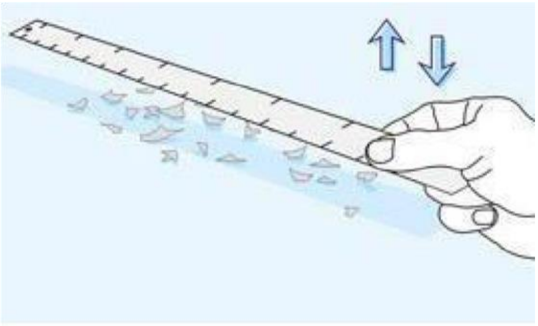
Operator del merupakan operator pada diferensial vektor yang disimbolkan dengan ∇ (nabla), yang didefinisikan dalam bentuk turunan parsial, yaitu:

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}}$$

Operator del ini bermanfaat untuk mencari gradien, divergensi, dan curl.

1. Gradien

Tahukah Anda apa itu gaya listrik?



Apabila penggaris digosokkan ke rambut kemudian didekatkan pada potongan-potongan kertas, maka potongan kertas tersebut akan ditarik ke penggaris plastik. Gaya tarik-menarik yang terjadi tersebut disebut gaya listrik.

Gaya listrik terjadi karena kekuatan muatan listrik. Penggaris yang digosokkan pada rambut akan bermuatan negatif. Penggaris didekatkan ke potongan kertas yang bermuatan positif, maka penggaris akan menarik potongan kertas

tersebut. Jadi, gaya listrik adalah gaya tarik-menarik atau tolakmenolak yang muncul akibat dua benda bermuatan listrik.

Untuk mencari gaya listrik dapat digunakan rumus gradien dari fungsi skalar, dimana fungsi skalarnya adalah potensial dari medan gravitasi.

Definisi Gradien

Misalkan $\phi(x, y, z)$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik

(x, y, z) dalam ruang R_3, maka gradien ϕ atau grad ϕ atau $\nabla\phi$ **Sifat-sifat** didefinisikan oleh

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\phi$$

$$= \frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

Ingat !!!

"Ingat bahwa gradien mengubah fungsi skalar menjadi fungsi vektor"

gradien

Misalkan $\phi(x,\ y,\ z)$ dan $\psi(x,\ y,\ z)$ adalah fungsi-fungsi skalar yang diferensiabel pada setiap titik (x, y, z) dan c adalah bilangan real, maka berlaku:

i. $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$

ii. $\nabla(c\phi) = c(\nabla\phi)$ iii. $\nabla(\phi\psi) = \phi\nabla\psi + \psi\nabla\phi$

2. Divergensi

Misalkan $\vec{A} = i\hat{A}_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z$ terdefinisikan dan terdeferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang maka divergensi dari $\vec{A}$ dapat didefinisikan sebagai :

$$div\ \vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{5.1}$$

Namun karena $\vec{\nabla}$ merupakan operator maka hubungan komunitatif $\vec{\nabla}.\vec{A} = \vec{A}.\vec{\nabla}$ tidaklah berlaku. Ruas kiri adalah suatu medan skalar, sedangkan ruas kanan merupakan operator diferensial baru. Salah satu cabang ilmu yang banyak memanfaatkan besaran divergensi adalah hidrodinamika dan aerodinamika.

Divergensi juga dapat dipahami dengan memahami definisi berikut !

Perhatikan gambar di samping!

Carilah balon yang telah diisi udara! Perlahan-lahan, buat beberapa lubang pada balon tersebut!, tekan balon dan rasakan gas yang bergerak keluar dengan kecepatan tertentu. Volume gas dalam balon akan berkurang seiring balon ditekan. Tahukah Anda berapa volume yang keluar tersebut?

Untuk menentukannya, dapat digunakan rumus divergensi. Volume per detik dari gas yang keluar dari balon sama dengan divergensi dari kecepatan gas tersebut.

Misalkan vektor $V(x, y, z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik (x, y, z). Divergensi dari V atau div

$V(\nabla . V)$, didefinisikan oleh:

$$\nabla . V = (\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k) . (V_1 i + V_2 j + V_3 k)$$

$$= \frac{\partial V_1}{\partial x} i + \frac{\partial V_2}{\partial y} j + \frac{\partial V_3}{\partial z} k$$

Ingat !!!

"Ingat bahwa divergensi mengubah fungsi vektor menjadi fungsi skalar"

Sifat-sifat divergensi:
Misalkan $F(x, y, z)$ dan $G(x, y, z)$ adalah vektor-vektor yang kontinu dan diferensiabel terhadap *x, y* dan *z*, $\phi(x, y, z)$ adalah fungsi skalar yang kontinu dan diferensiabel terhadap *x, y* dan *z*, serta a dan b adalah bilangan real, maka berlaku

i. $\nabla . (aF + bG) = a\nabla . F + b\nabla . G$ ii. $\nabla . (\phi F) = \phi(\nabla . F) + (\nabla \phi). F$ iii. $\nabla . (F \times G) = (\nabla \times F). G - F. (\nabla \times G)$ iv. $\nabla . (\nabla \times G) = 0$

Untuk lebih memahami tentang masalah ini, tinjaulah sebuah fluida dengan rapat massa □□x, y, z; t□ dan kecepatan fluida $\vec{v}(x, y, z: t)$ yang memberikan rapat arus sebesar :

$$\vec{j} = \rho \vec{v} \qquad (5.2)$$

Bila $d\vec{s} = \hat{n}ds$ adalah vektor luasan ds pada suatu permukaan bidang yang membentuk sudut ϕ dengan $\vec{v}$ maka jumlah massa fluida per satu satuan waktu yang melalui permukaan ds adalah

$$\frac{dm}{dt} = \vec{j}.d\vec{s} = \vec{j}.\hat{n}d\vec{s} \quad (5.3)$$

Menurut hukum kekekalan massa, besarnya fluks materi tersisa yang keluar dari unsur volume ΔV suatu fluida harus sama dengan berkurangnya massa di dalam unsur volume ΔV yang sama dengan laju perubahan rapat massa terhadap waktu $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ dikalikan dikalikan dengan unsur volume ΔV sehingga berlaku persamaan:

$$\vec{\nabla}.\vec{j} = \frac{-\partial\rho}{\partial t} \quad (5.4)$$

Persamaan ini dikenal dengan persamaan kontinuitas, yang tidak lain merupakan hukum kekekalan massa. Bila di dalam proses aliran tersebut tidak terjadi penambahan ataupun pengurangan materi maka $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ sehingga,

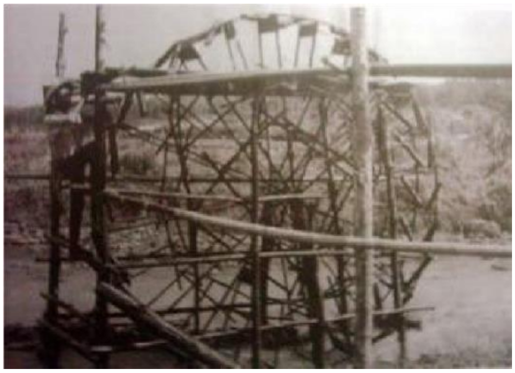
$$\vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \quad (5.5)$$

Dengan kata lain, bila $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ maka di dalam proses aliran tersebut tidak terdapat sumber sehingga medan vektor $\vec{j}$ yang memenuhi persamaan (2.30) dinamakan **medan solenoidal.**

3. Curl

Apakah Anda sudah pernah melihatnya? Gambar tersebut adalah kincir air. Kincir air selalu berputar dengan kecepatan konstan.

Kecepatan linear dari perputaran kincir air sama dengan perkalian silang antara kecepatan sudut dengan vektor posisi jari-jari kincir



tersebut. Berdasarkan teori tersebut, maka kita dapat menentukan berapa kecepatan sudut dari perputaran kincir air. Kecepatan sudut dari kincir air yang bergerak dengan kecepatan konstan sama dengan ½ curl dari kecepatan kincir pada setiap titik.

Definisi Curl

Jika vektor $V(x, y, z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$ terdefinisi dan diferensiabel pada setiap titik (x, y, z). Maka *curl* dari V atau rot $V(\nabla \times V)$, didefinisikan oleh

$$\nabla \times V = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \times (V_1 i + V_2 j + V_3 k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_2 & V_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ V_1 & V_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

$$\nabla \times V = \left(\frac{\partial V_3}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z}\right) \boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial V_1}{\partial z} - \frac{\partial V_3}{\partial z}\right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right) k$$

Sifat-sifat *Curl*

Misalkan $F(x, y, z)$ dan $G(x, y, z)$ adalah vektor-vektor yang kontinu dan diferensiabel terhadap x, y dan z, $\phi(x, y, z)$ adalah fungsi skalar yang kontinu dan diferensiabel terhadap x, y dan z, serta a dan b adalah bilangan real, maka berlaku,

i. $\nabla \times (F + G) = (\nabla \times F) + (\nabla \times G)$ ii. $\nabla \times aF = a(\nabla \times F)$ iii. $\nabla \times \phi F = (\nabla\phi) \times F + \phi(\nabla \times F)$ iv. $\nabla \times (\nabla \times F) = \nabla(\nabla. F) - \nabla^2 F$ v. $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$ vi. $\nabla \times (F \times G) = (G.\nabla)F - G(\nabla. F) - (F.\nabla)G + F(\nabla. G)$

Contoh

Tentukan medan vektor berikut ini bersifat solenoidal atau bukan. a. $\vec{A} = \hat{\imath}(3x + 2y) + j(y + 5z) + \hat{k}(x + y - 7z)$

b. $\vec{B} = \hat{\imath}x^2 z - \hat{\jmath}3y^3 z^2 + \hat{k}xy^2 2z$

Penyelesaian

a. Medan vektor $\vec{A}$ bersifat solenoidal apabila $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(3x + 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(4y + 5z) + \frac{\partial}{\partial z}(x + y - 7z)$$
$$= 3 + 4 - 7$$
$$= 0$$

Jadi medan vektor $A^{\rightarrow}$ bersifat solenoidal

b. Medan vektor $A^{\rightarrow}$ bersifat solenoidal apabila $\nabla^{\rightarrow\rightarrow}.\, A^{\rightarrow} = 0$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(3y^3z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 2z)$$
$$= 6xz - 9y^2z^2 + 2xy^2$$
$$\neq 0$$

Jadi medan vektor $B^{\rightarrow\rightarrow}$ tidak bersifat solenoidal

Bentuk hasil kali vektor antara operator nabla $\nabla^{\rightarrow\rightarrow}$ dengan medan vektor $v^{\rightarrow}$ dinamakan rotasi (Curl) medan vektor $v^{\rightarrow}$. Jadi, jika $v^{\rightarrow}(x, y, z)$ adalah sebuah medan vektor diferensiabel maka Curl atau rotasi dari $v^{\rightarrow}$ dapat didefinisikan sebagai:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{\imath}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

(2.31)

Misalkan, bila $v^{\rightarrow}$ adalah medan vektor yang berhubungan dengan aliran fluida maka sebuah roda kecil yang ditentukan di berbagai tempat di dalam medan tersebut akan berputar, asalkan di tempattempat tersebut berlaku $\nabla^{\rightarrow\rightarrow} \times v^{\rightarrow} \neq 0$. Sebaliknya, bila di tempat tersebut berlaku maka roda kecil tersebut tidak akan berputar.

Medan vektor $\vec{v}$ yang memiliki sifat $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ dinamakan **medan irrotasional**. Sedangkan medan vektor yang tak irrotasional dinamakan **medan vorteks**.

Contoh

- Selidikilah apakah medan berikut ini merupakan medan irrotasional atau vorteks $\vec{A} = \hat{i}2xz^2 - \hat{j}yz + \hat{k}3xz^3$.

Penyelesaian

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial}{\partial y}(3xz^3) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz)\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial}{\partial z}(2xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3xz^2)\right) +$$

$$\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz) - \frac{\partial}{\partial y}(2xz^2)\right) \qquad = \hat{\imath}y + \hat{\jmath}(4xz - 3z^2)$$

Jadi, medan vektor $\vec{A}$ bukan merupakan medan irrotasional, tetapi merupakan medan vorteks, sebab $\vec{\nabla} \times \vec{A} \neq 0$. Jika $\vec{A}, \vec{B}$ adalah medan vektor diferensiabel dan, ϕ, ψ merupakan medan skalar diferensiabel maka dengan menggunakan operator nabla $\vec{\nabla}$ diperoleh relasi sebagai berikut,

1. $\nabla.(\vec{A}.\vec{B}) = \nabla.\vec{A} + \nabla.\vec{B}$
2. $\nabla.(\phi.\vec{A}) = (\nabla\phi).\vec{A} + \phi(\nabla.\vec{A})$
3. $\nabla.(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B}.(\nabla \times \vec{A}) - \vec{A}.(\nabla \times \vec{B})$
4. $\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$
5. $\nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B}$
6. $\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B}.\nabla)\vec{A} - \vec{B}(\nabla.\vec{A}) - (\vec{A}.\nabla)\vec{B} + \vec{A}(\nabla.\bar{B})$
7. $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$
8. $\nabla.(\nabla \times \vec{A}) = 0$
9. $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla.(\nabla.\vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

10. $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}$ disebut operator Laplace.

Evaluasi

1. Jika $\phi = 2xz^4 - x^2y$, maka carilah $\nabla\phi$ dan $|\nabla\phi|$ pada titik (3, -4, -1)
2. Jika (x, y, z) = |r|^n, dimana r = xi + yj + zk carilah $\nabla\phi$!
3. Buktikan bahwa $\nabla(\phi + \psi) = \nabla\phi + \nabla\psi$
4. Buktikan bahwa

   i. $\nabla.(aF + bG) = a\nabla.F + b\nabla.G$ ii. $\nabla.(\phi F) = \phi(\nabla.F) + (\nabla\phi).F$ iii. $\nabla.(F \times G) = (\nabla \times F).G - F.(\nabla \times G)$ iv. $\nabla.(\nabla \times G) = 0$
5. Jika $A = 2x^3yz^2\boldsymbol{i} + 2xy^3\boldsymbol{j} - x^2yz$ dan $\phi = 3x^2 - yz$ Carilah a) $\nabla.A$ b) $A.\nabla\phi$ di titik (2, -2, 2) !
6. Jika $F = 2xy^2\ \boldsymbol{i} + xyz\ \boldsymbol{j} + y^2z^2$ maka tentukanlah

   a) $\nabla \times F$

   b) $\nabla \times (\nabla \times F)$

   Pada titik M (0,2,1)
7. Buktikan bahwa medan vektor $F = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ adalah medan vektor konservatif !
8. Tentukan divergensi F dengan $(x, y, z) = (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$ **!**

Teorema Divergensi Gauss

Materi Pokok

1. Teorema Divergensi Gauss

URAIAN MATERI

REMEMBER THAT !!!

1. Pernahkah anda mempelajari tentang teorema ? 2. Apa yang anda ketahui mengenai teorema divergensi Gauss, Stokes dan Green?

Untuk memudahkan perhitungan seringkali dibutuhkan penyederhanaan bentuk integral yang berdasarkan pada teorema tertentu. Ada tiga teorema fundamental berkaitan dengan operasi diferensial dan integral yang telah dijelaskan sebelumnya, yaitu:

Teorema Gauss, Teorema Stokes, dan Teorema Green

Teorema Gauss

Pada modul 5, telah dijelaskan bahwa untuk menghitung volume air yang mengalir melewati pipa dapat menggunakan rumus integral permukaan. Namun, ada perhitungan yang lebih mudah untuk menghitung volume air tersebut, yaitu dengan menggunakan teorema Gauss.

Sudah dijelaskan sebelumnya pada modul integral permukaan, bahwa volume total per detik dari fluida yang keluar dari permukaan tertutup S adalah

$$= \iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

Pada modul divergensi $\nabla.\mathbf{v}\,dV$ merupakan volume per detik dari fluida yang keluar dari sebuah elemen volume dV. Oleh karena itu, maka volume total per detik dari fluida yang keluar dari semua elemen volume dalam permukaan tertutup S adalah

$$= \iiint_V \nabla.\mathbf{v}\,dV$$

Jadi

$$\iint_S \mathbf{v}\,.\,\mathbf{n}\;dS = \iiint_V \nabla.\mathbf{v}\,dV$$

Definisi Teorema Gauss

Jika V adalah volume yang dibatasi oleh suatu permukaan tertutup S dan sebuah fungsi vektor dengan turunan-turunan yang kontinu, maka

$$\iiint_V \nabla.\mathbf{A}\,dV = \iint_S \mathbf{A}\,.\,\mathbf{n}\;dS = \oiint_S \mathbf{A}.\,d\mathbf{S}$$

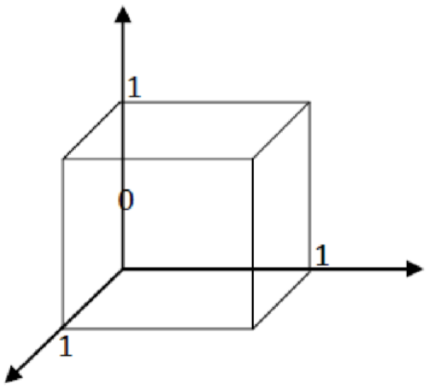
Dari rumus tersebut, integral permukaan dari sebuah vektor A yang mengelilingi sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari divergensi A dalam volume yang diselubungi oleh permukaan di atas. Jadi, dalam mencari integral permukaan dapat juga digunakan Teorema Gauss.

Contoh Soal

Hitunglah $\iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\;dS$ dimana $\mathbf{A} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$ dan S adalah merupakan permukaan kubus yang dibatasi oleh $x = 0, x = 1,\; y = 0, y = 1,\; z = 0,\; z = 1$

1.

Penyelesaian



Menurut teorema divergensi

$$\iiint_V \nabla . \mathbf{A}\, dV = \iint_S \mathbf{A} \,.\, \mathbf{n}\ dS$$

Maka

$$\iiint_V \nabla . \mathbf{A}\, dV = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) . [(2x - z)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}]dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (2 + x^2 - 2xz)\, dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(2x + \frac{x^3}{3} - x^2 z\right)\Bigg|_0^1 dydz$$

$$= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{7}{3} - z\right) dydz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{3}y - zy\right)\Bigg|_0^1 dydz$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{7}{3} - z\right) dz$$

$$= \left(\frac{7z}{3} - \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{11}{6}$$

Jadi $\iint_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\ dS = \iiint_V \mathbf{\nabla}.\mathbf{A}\, dV = \frac{11}{6}$

2. Hitunglah $\iint_S \mathbf{r}.\,\mathbf{n}\ dS$ dimana S adalah suatu permukaan tertutup

Penyelesaian

$$\iint_S \mathbf{r}.\mathbf{n}\, dS = \iiint_V \mathbf{\nabla}.\mathbf{r}\, dV$$

$$\iiint_V \mathbf{\nabla}.\mathbf{r}\, dV = \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right).(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k})dV$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dV$$

$$= 3\iiint_V dV = 3V$$

Dimana V adalah volume benda yang dibatasi S.

URAIAN MATERI

Teorema Divergensi Gauss

Materi Pokok

1. Teorema Stokes

Teorema Stokes

Coba Anda perhatikan gambar di samping!

Apa yang Anda lihat? Pada gambar tampak seorang ibu dan bapak sedang mendorong mobil. Jika mobil yang mereka dorong tersebut bergerak, berarti mereka telah melakukan usaha.

Sebelumnya, kita telah mempelajari bahwa untuk menghitung besar usaha dapat kita gunakan perkalian titik atau integral garis tergantung pada bentuk lintasan. Namun ada kalanya kita kesulitan untuk menghitung besar usaha, misalnya pada bidang dimensi-3. Perhitungan untuk mencari besar usaha akan lebih mudah dengan menggunakan teorema Stokes.

Berikut definisi Teorema Stokes

Teorema Stokes

Misalkan S adalah permukaan berarah dalam ruang dengan batasbatasnya adalah kurva C yang tertutup, dan misalkan F(x, y, z) adalah fungsi vektor kontinu yang mempunyai turunan parsial pertama yang kontinu dalam domain yang memuat S, maka

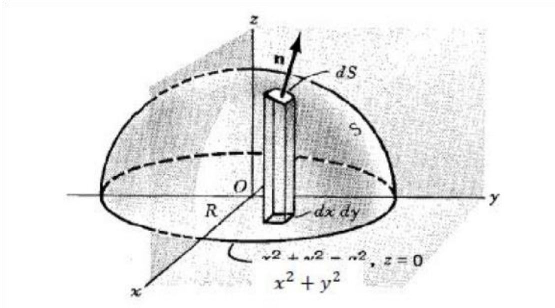
$$\oint_C \mathbf{F}.\,\mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})\,.\,\mathbf{n}dS = \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F})\;d\mathbf{S}$$

Dari rumus di atas dapat disimpulkan, integral garis dari sebuah vektor **F** yang mengelilingi sebuah kurva tertutup sederhana C sama dengan integral permukaan dari curl **F** melalui sebarang permukaan S dengan C sebagai batasnya.

Contoh

1. Hitunglah $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \,.\, dS$ dengan menggunakan teorema Stokes jika diketahui $\mathbf{A} = (2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}$ dimana S adalah separuh dari permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ bagian atas dan C batasnya.

   Penyelesaian

   Batas C dari S adalah suatu lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ dan persamaan parameternya adalah $x = cos\ t$, $y = sin\ t$, $z = 0$ dimana $0 \leq t \geq 2\pi$. Berdasarkan teorema Stokes

   $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \,.\, \mathbf{n}dS = \oint_C \mathbf{A}.\, d\mathbf{r}$. Maka berdasarkan teorema Stokes

   $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \,.\, \mathbf{n}dS = \oint_C \mathbf{A}.\, d\mathbf{r}$.

   $$\oint_C \mathbf{A}.\, d\mathbf{r} = \oint_C [(2x - y)\mathbf{i} - yz^2\mathbf{j} - y^2z\mathbf{k}] \,.\, d(x\mathbf{i} - y\mathbf{j} - z\mathbf{k})$$

$$= \oint_0^{2\pi} (2x - y)dx - yz^2 dy - y^2 z dz$$

$$= \oint_0^{2\pi} (2 \cos t - \sin t)(-\sin t)dt$$

$$= \oint_0^{2\pi} (-2 \sin t \cos t + \sin^2 t)\, dt$$

$$= \oint_0^{2\pi} \left(-\sin 2t + \frac{1}{2} - \frac{\cos 2t}{2}\right) dt$$

$$= \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t \,\Bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

Jadi $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A}. d\mathbf{r} = \pi$

2. Buktikan $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} dS$

Penyelesaian

$$\oint d\mathbf{r} \,.\, (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = \iint_S [\nabla \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})].\mathbf{n}\ dS$$

$$\oint C \,.\, (d\mathbf{r} \times \mathbf{B}) = \iint_S [(\mathbf{C}.\nabla)\mathbf{B} - \mathbf{C}(\nabla.\mathbf{B})].\mathbf{n}\ dS$$

$$\mathbf{C}.\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S [(\mathbf{C}.\nabla)\mathbf{B}].\mathbf{n}\, dS - \iint_S [\mathbf{C}(\nabla.\mathbf{B})].\mathbf{n}\, dS$$

$$= \iint_S \mathbf{C}.[\nabla(\mathbf{B}.\mathbf{n})] dS - \iint_S \mathbf{C}[\mathbf{n}(\nabla.\mathbf{B})]\, dS$$

$$= \mathbf{C}. \iint_S [\nabla(\mathbf{B}.\mathbf{n}) - \mathbf{n}(\nabla.\mathbf{B})]\, dS$$

$$= \mathbf{C}. \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B}\, dS$$

Karena vektor C vektor konstan sebarang maka $\oint d\mathbf{r} \times \mathbf{B} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \times \mathbf{B} dS$

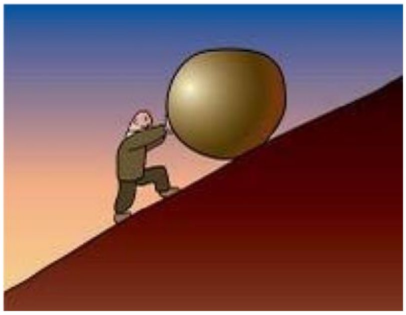
Teorema Divergensi Gauss

Materi Pokok

2. Teorema Stokes

URAIAN MATERI

Teorema Green



Pada materi sebelumnya, kita telah mengenal teorema Stokes. Teorema Stokes berlaku untuk permukaan permukaan S dalam ruang yang memiliki kurva C sebagai batasnya. Sedangkan, teorema Green berlaku pada daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh kurva tertutup C. Istilahnya, teorema Green dalam bidang adalah hal khusus dari teorema Stokes.

Jadi, tambah satu cara lagi untuk mencari besar usaha. Yaitu, dengan menggunakan teorema Green dalam bidang.

Definisi Teorema Green

Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C, M dan N adalah fungsi-fungsi kontinu dari x dan y yang memiliki turunan -turunan kontinu dalam R, maka,

$$\oint_C Mdx + Ndy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dxdy$$

Jika **A** menyatakan medan gaya yang bekerja pada sebuah partikel dimana A = $M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$, maka $\oint_C \mathbf{A}.\, d\mathbf{r}$ adalah usaha yang dilakukan dalam menggerakkan partikel tersebut mengelilingi suatu lintasan tertutup C. Yaitu

$$\oint_C \mathbf{A}.\, d\mathbf{r} = \oint_C (M\mathbf{i} + N\mathbf{j}).(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$
$$= \oint_C Mdx + Ndy$$

Dengan menggunakan teorema Green, maka usaha yang dilakukan adalah

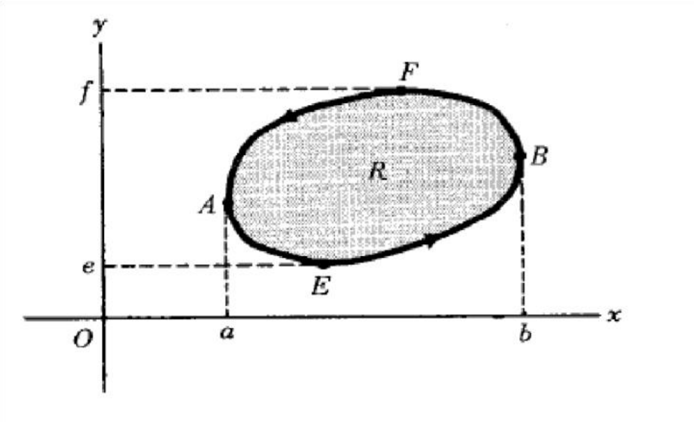
$$W = \iint_R \left(\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\right) dxdy$$

Jadi, selain perhitungan dengan menggunakan integral garis, menentukan besar usaha yang dilakukan juga dapat dihitung dengan menggunakan teorema Green.

Contoh

1. Buktikanlah teorema Green dalam bidang jika C adalah sebuah kurva tertutup yang memiliki sifat bahwa setiap garis lurus yang sejajar sumbu koordinat memotong C paling banyak pada dua titik

   Penyelesaian



Misalkan persamaan kurva AEB dan AFB berturut-turut adalah$y = y_1(x)$ dan $y = y_2(x)$. Jika R adalah daerah yang dibatasi oleh C, diperoleh

$$\iint_R \frac{dM}{dy} dxdy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{dM}{dy} dy \right] dx = \int_{x=a}^{b} M(x,y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [M(x,y_2) - M(x,y_1)] dx = -\int_a^b M(x,y_1)\, dx - \int_b^a M(x,y_2)\, dx$$

$$= -\oint_C M\, dx$$

Sehingga diperoleh

$$\iint_R \frac{dM}{dy} dxdy = -\oint_C M\, dx$$

Dengan cara yang sama, misalkan persamaan-persamaan kurva EAF dan EBF berturut-turut adalah $x = x_1(y)$ dan$x = x_2(y)$ Maka

$$\iint_R \frac{dN}{dy} dxdy = \int_{y=e}^{f} \left[\int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{dN}{dy} dx \right] dy = \int_{y=e}^{f} M(x,y) \Big|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy$$

$$= \int_e^f [N(x_2,y) - N(x_1,y)] dy = \int_f^e N(x_2,y)\, dy + \int_e^f N(x_1,y)\, dy$$

$$= \oint_C N\, dy$$

Sehingga diperoleh

$$\iint_R \frac{dN}{dx} dxdy = \oint_C N\, dy$$

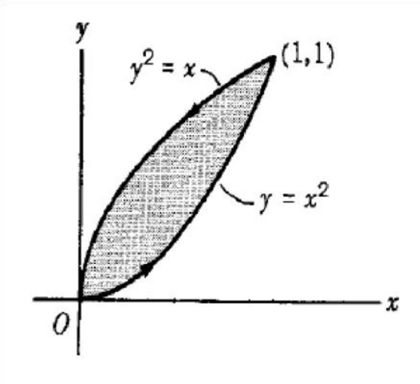
Kemudian jumlahkan kedua hasil di atas

$$\oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

2. Periksa teorema Green pada bidang untuk $\int_C (2xy - x^2)\, dx + (x - y^2) dy$ dimana C adalah kurva tertutup dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$

   Penyelesaian

   Kurva-kurva bidang tersebut berpotongan di (0, 0) dan (1,1). Arah positif dalam menjalani C ditunjukkan pada gambar



Sepanjang $y = x^2$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{x=0}^{1} [(2x)(x^2) - x^2]\, dx + [(x) + (x^2)^2] d(x^2)$$

$$= \int_{x=0}^{1} (2x^3 + x^2 + 2x^5) dx = \frac{7}{6}$$

Sepanjang $y^2 = x$ integral garisnya sama dengan

$$\int_{y=1}^{0} [(2y^2)(y) - (y^2)^2]\, d(y^2) + (y^2 + y^2) dy$$

$$= \int_{y=1}^{0} (4y^4 - 2y^5 + 2y^2) dy = -\frac{17}{15}$$

Maka integral garis yang diinginkan $-\frac{7}{6}-\frac{17}{15}=\frac{1}{30}$

Dengan menggunakan teorema Green

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)dxdy = \iint_R \left[\frac{\partial(x+y^2)}{\partial x}-\frac{\partial(2xy+x^2)}{\partial y}\right]dxdy$$

$$= \iint_R (1-2x)dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=x^2}^{\sqrt{x}} (1-2x)dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1} (y-2xy)\Big|_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-x^2+2x^3\right)dx$$

$$= \frac{1}{30}$$

Dengan demikian selesailah pemeriksaan teorema Green.

3. Perlihatkan bahwa jika suatu daerah S pada bidang mempunyai batas C , dengan C adalah kurva tertutup sederhana, maka luas S diberikan oleh

$$A(S) = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx$$

Penyelesaian

Misalkan $M(x,y) = -\frac{y}{2}$ dan $N(x,y) = \frac{x}{2}$ dan terapkan teorema Green

$$\oint_C \left(-\frac{y}{2}dx+\frac{x}{2}dy\right) = \iint_S \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{2}\right)\right]dxdy$$

$$= \iint_S \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) dxdy$$

$$= \iint_S dA$$

$$= A(S)$$

Evaluasi

1. Tentukan $\iint_S \mathbf{A}.\,\mathbf{n}\, dS$ untuk $\mathbf{A} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$ pada daerah yang dibatasi oleh $2x + 2y + z = 6$, $x = y = z = 0$!
2. Jika S adalah permukaan tertutup sebarang yang menutupi sebuah volume V dan $\mathbf{A} = ax\mathbf{i} + by\mathbf{j} + cz\mathbf{k}$ maka buktikan bahwa

   $\iint_S \mathbf{A}.\,\mathbf{n}\, dS = (a + b + c)V$
3. Hitunglah $\iint_S \mathbf{F}.\,\mathbf{n}\, dS$ dimana $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ dan S adalah a.

   permukaan balok yang dibatasi oleh $x = 0, x = 2, y = 0, y = 1$, b.
   $z = 0$ dan $z = 3$
   permukaan daerah yang dibatasi oleh $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$,
   $z = 0$ dan $x + 2z = 6$
4. Hitung $\iint_S \mathbf{F}.\,\mathbf{n}\, dS$ dimana $\mathbf{F} = x^2yz\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$ dalam daerah pejal S yang dibatasi oleh tabung parabol $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$ dan bidangbidang $z = 0$, $y = x$ dan $y = 0$.
5. Buktikanlah bahwa $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A})\,.\,\mathbf{n}\, dS = 0$ untuk suatu permukaan tertutup S !
6. Hitung $\iint_S \mathbf{F}.\,\mathbf{n}\, dS$ melalui seluruh permukaan S dari daerah yang dibatasi oleh silinder $x^2 + x^2 = 9$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ dan $y = 8$ jika $\mathbf{A} = 6z\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} - x\mathbf{k}$!
7. Gunakan teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S (\nabla \times \mathbf{A})\,.\,\mathbf{n}\, dS$ dengan $\mathbf{A} = 3y\mathbf{i} - xz\mathbf{j} - yz^2\mathbf{k}$ dimana S adalah permukaan paraboloida $2z = x^2 + y^2$ yang dibatasi oleh $z = 2$ dan C sebagai batasnya !
8. Hitunglah $\oint_C \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{r}$ dimana $\mathbf{F} = xz\mathbf{i} + 2z\mathbf{j} - xy\mathbf{k}$ dan C adalah perpotongan bidang $y = z + 2$ dengan silinder $x^2 + y^2 = 4$!

9. Hitunglah $\oint_C [(x^2 - xy^3)dx + (y^2 - 2xy)dy]$ di mana C adalah suatu bujur sangkar dengan titik sudut (0, 0), (0,2), (2,2), (2,0)!

10. Hitunglah $\int_C [(2x - y + 4)dx + (5y + 3x - 6)dy]$ di sekeliling suatu segitiga pada bidang xy dengan titik sudut (0,0), (3,0), (3,2) yang dijalani berlawanan arah dengan jarum jam !

Daftar Pustaka

Murray R. Spiegel. 1999. *Analisis Vektor*. Erlangga: Jakarta Keijo

Ruohonen. 2013. *Vector Fields*. *Online Eddition*.

Pandiangan, Paken. 2006. *Modul Perkuliahan Analisis Vektor*.

Susanto. 2012. *Geometri Analitik Ruang*. Program Studi Matematika Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.

K.A. Stroud and DexterJ. Booth. 2003. *Matematika Teknik*. Edisi Ke Lima Jilid 1. Jakarta: Erlangga