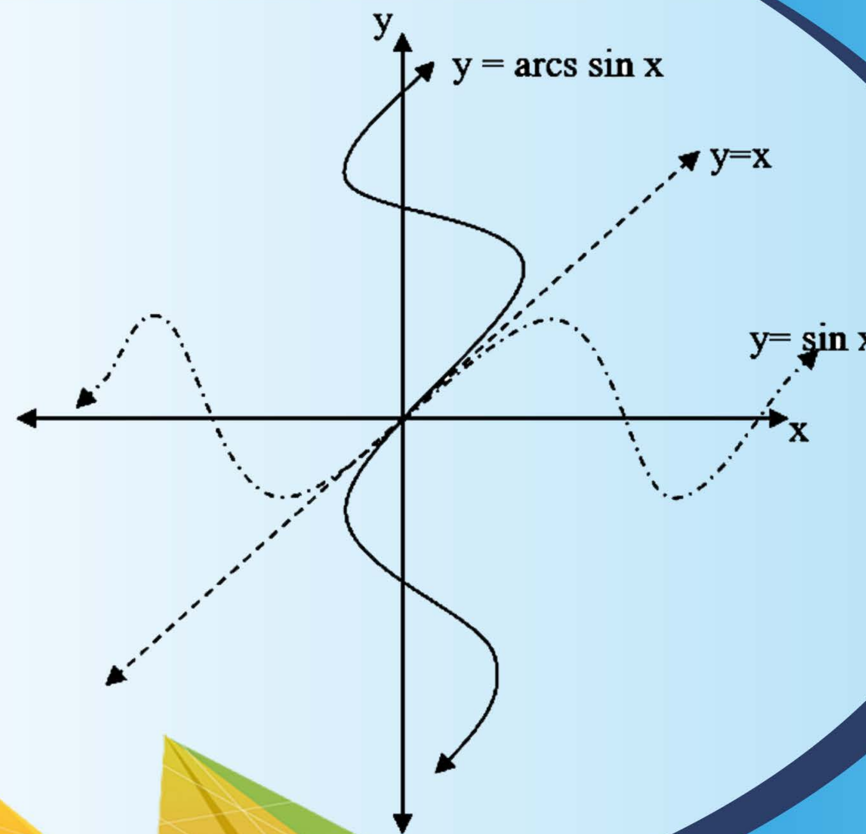
PERMODELAN KALKULUS DIFERENSIAL

Penerbit UNIPMA Press
Universitas PGRI Madiun
Jl. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id

ISBN 978-623-6318-50-8
9 786236 318508

PERMODELAN KALKULUS DIFERENSIAL
Dr. SANUSI, M.Pd.

UNIPMA Press
WE GOT IT



PERMODELAN KALKULUS DIFERENSIAL

Dr. SANUSI, M.Pd.

Permodelan Kalkulus Diferensial

Dr. Sanusi, M.Pd.

UNIPMA Press
WE GOT IT

PERMODELAN KALKULUS DIFERENSIAL

Penulis:
Dr. Sanusi, M.Pd.
Perancang Sampul:
Ahmad Hanin Lathif
Penata Letak:
Rasyid Hidayat

Cetakan Pertama, Januari 2022

Diterbitkan Oleh:
UNIPMA Press Universitas PGRI Madiun
JI. Setiabudi No. 85 Madiun Jawa Timur 63118
E-Mail: upress@unipma.ac.id
Website: kwu.unipma.ac.id
Anggota IKAPI: No. 207/Anggota Luar Biasa/JTI/2018

ISBN:978-623-6318-50-8

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa yang telah memberikan rahmat dan hidayahnya sehingga penulisan Buku Kalkulus Diferensial dapat terselesaikan.

Penyusunan Buku ini penulis telah berusaha dengan cermat dan menggunakan beberapa riferensi yang relevan. Namun demikian, penulis sadari masih banyak kekurangan yang perlu adanya perbaikan, baik dari segi pengembangan maupun kedalaman materi. Oleh karena itu kritik dan saran diharapkan mampu menyempurnakan buku ajar Kalkulus Diferensial.

Penulis sampaikan terima kaih pada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan buku ajar ini. Semoga melalui buku ajar kalkulus diferensial dapat memberikan manfaat bagi para pembaca yang mempunyai keinginan untuk menambah wawasan

Madiun, November 2021

Penyusun

DAFTAR ISI

Deskripsi Mata kuliah

Pemahaman dasar kalkulus diferensial, fungsi satu peubah yang membahas konsep teorema dan algorima secara intensif dan tidak terlalu formal, serta penerapannya pada berbagai masalah. Topik-topiknya ialah system bilangan real, fungsi dan limit fungsi, turunan fungsi satu peubah, teorema nilai rata-rata. Teorema De L'Hospital, Titik Ekstrim, Titik belok, Derevatif Fungsi tersusun, Derevatif Fungsi Implisit, dan Derevatif Fungsi Explisit

Capaian Pembelajaran Mata kuliah

Mahasiswa dapat menguasai konsep dasar kalkulus menentukan fungsi, macam-macam fungsi, grafik dan invers fungsi serta derevatifnya

BAB I
SISTEM BILANGAN REAL

Kompetensi Dasar

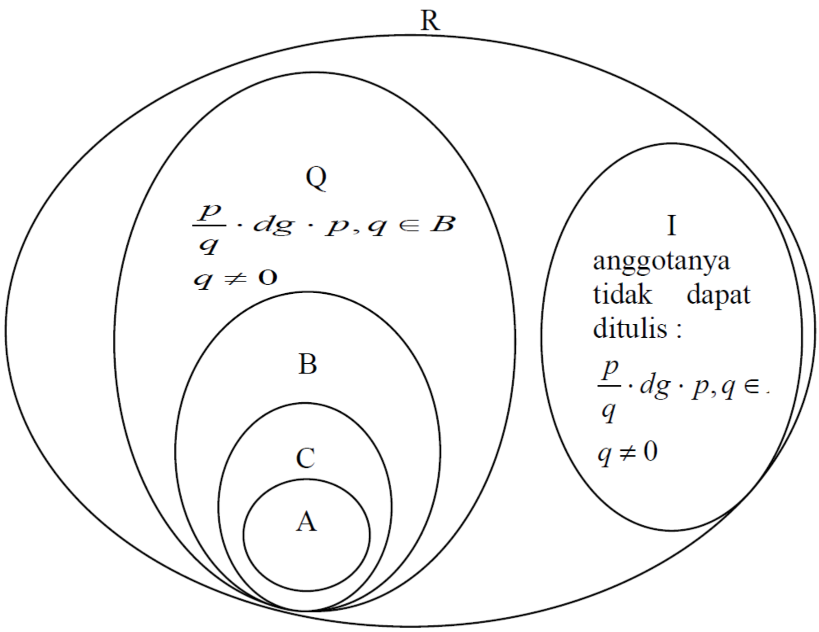
Menjelaskan hakikat bilangan real dan menyelesaikan pertidaksamaan fungsi

Pengalaman Belajar

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian bilangan real
2. Mahasiswa dapat menentukan penyelesaian pertidaksamaan fungsi

1. Himpunan Bilangan

Pada gambar di bawah ini, akan memudahkan agar kita dapat memahami himpunan bilangan dan sistem bilangan real



Berdasarkan gambar di atas maka elemen/anggota-anggota himpunan bilangan dapat kita tentukan sebagai berikut:

1). Himpunan Bilangan Asli   A = { 1, 2, 3, ...}

2). Himpunan Bilangan Cacah C = {0, 1, 2, 3, ...}

3). Himpunan Bilangan Bulat   B = {....-3,-2,-1,0, 1, 2, 3,......}

4). Himpunan Bilangan Rasional Q yaitu suatu himpunan yang anggota-anggotanya dapat dinyatakan dalam bentuk:

$\frac{p}{q} \cdot dengan \cdot p,q \in B, q \neq 0$

Contoh:

$\frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \frac{-3}{7}$, -5, $6\frac{1}{4}$

- Jika **p habis dibagi q**, maka bilangan Rasional tersebut merupakan **bilangan bulat**

  Contoh:

  $\frac{6}{2} = 3$

- jika **p tidak habis dibagi q**, maka bilangan Rasional tersebut merupakan **pecahan**.

  Contoh:

  $\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

5). Himpunan Bilangan Irasional I, yaitu suatu himpunan yang anggota-anggotanya tidak dapat dinyatakan dalam bentuk:

$\frac{p}{q} \cdot dengan \cdot p,q \in B, q \neq 0$

Contoh:

$\sqrt{2}$, log 3

Catatan

- Gabungan himpunan bilangan rasional dan Irasional (QUI) disebut bilangan Real atau bilangan nyata.
- Selain bilangan bilangan real disebut bilangan khayal atau imajiner sebagai contoh:

  $\sqrt{-9}$

Sifat-sifat Sistem bilangan real pada dua operasi penjumlahan dan perkalian antara lain:

Misal: a, b dan c $\in$ R

1). Sifat Tertutup : a+b $\in$ R, ab$\in$ R dan tunggal

2). Sifat Komutatif : a+b= b+a,   ab= ba

3). Sifat Assosiatif : $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$
4). Sifat Distributif perkalian dalam penjumlahan $a(b+c) = ab+ac$
5). Elemen Identitas

Terdapat dua bilangan real 0 dan 1, sehingga setiap a berlaku $a+0= a$ dan $a.1= a$

6). Invers aditif,

Untuk setiap bilangan a terdapat suatu bilangan –a yang disebut negatif a, sehingga $a+(-a) = 0$

7). Invers perkalian

Untuk setiap bilangan a dan $a \neq 0$ terdapat suatu bilangan $\frac{1}{a}$ yang disebut kebalikan a, sehingga $a.\frac{1}{a} = 1$

Catatan

- Operasi pengurangan dapat dikembalikan pada operasi penjumlahan, secara umum dapat dilakukan $a-b = a+(-b)$
- Operasi pembagian dapat dikembalikan pada operasi perkalian, dapat ditulis bahwa

  $\frac{a}{b} = a.\frac{1}{b}$, $b \neq 0$

2. Pertidaksamaan

Dalam subtopik ini pembahasan yang akan dilakukan adalah menyelesaikan suatu pertidaksamaan. Sebagai syarat kita harus faham tentang persamanan. Materi ini sangat penting karena materi ini akan berkaitan dengan materi berikutnya yaitu materi limit fungsi. Kadang kita temukan atau menemuhi/muncul bentuk pertidaksamaan yang ada kaitannya dengan harga mutlak. Misalkan bentuk $|x-1| < 0{,}05$, pada bentuk ini akan berkaitan sekali dengan beberapa sifat pada pertidaksamaan dan harus difahami agar mengetahui apa yang harus dilakukan pada penyelesaian pertidaksamaan tersebut. Adapun sifat-sifat pertidaksamaan sebagai berikut.

Misalkan a, b, c dan d $\in$ R, maka sifat –sifat pertidaksamaan dapat ditulis:

1). Jika $a<b$ dan $b<c$, maka $a<c$
2). $a<b$, jhj $a+c< b+c$
3). Jika $a<b$ dan $c<d$, maka $a+c< b+d$
4). Jika $c>0$, $a<b$, jhj $ac<bc$
5). Jika $c<0$, $a<b$, jhk $ac>bc$
6). Jika a, b bertanda sama $a<b$, jhj $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$
7). Jika $a>0$, $b>0$, jhj $a^2 < b^2$
8). Jika $a<0$, $b<0$, jhj $a^2 > b^2$

Adapun untuk memahami lebih dalam maka ada beberapa hal yang berkaitan dengan pertidaksamaan dan perlu adanya difinisi tertentu, sebagai berikut:

Definisi :

1) **Selang terbuka** (a, b) adalah Himpunan Bilangan Real x yang anggotanya memenuhi $a<x<b$
2) **Selang tertutup** [a, b] adalah Himpunan Bilangan Real x yang anggoatanya memenuhi $a\leq x\leq b$
3) **Selang terbuka** sebelah kanan dan **tertutup** sebelah kiri [a, b) adalah Himpunan Bilangan Real x yang anggotanya memenuhi $a\leq x<b$
4) **Selang tak hingga tertutup** sebelah kanan $(-\infty, a]$ adalah Himpunan Bilangan Real x yang anggoatanya memenuhi , $x\leq a$

Berdasarkan difinisi tersebut, sifat terpenting dalam bilangan real untuk memeudahkan memehami dapat digambarkan petanya sebagai suatu titik pada garis bilangan.

Contoh:

Tentukan himpunan penyelesaian

$$(x-a)\ (x-b)\ (x-c) <0 \text{ dengan } a<b<c$$

Penyelesaian :

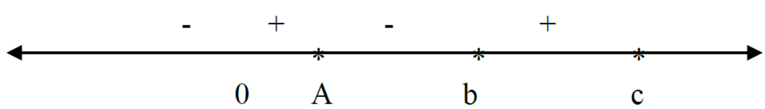
$(x-a)\ (x-b)\ (x-c) < 0$, nilai nol pada pertidaksamaan (kita mengubah pertidaksaan tersebut ke dalam bentuk persamaan), didapat persamaan berikut:

$(x-a)\ (x-b)\ (x-c) = 0$ selanjutnya didapat

$x-a= 0 \quad \vee \quad x-b=0 \quad \vee \quad x-c=0$

$x_1= a, \qquad x_2=b \qquad x_3 = c$

digambarkan dengan garis bilangan



Sesuai dengan tanda pertidaksamaan < maka penyelesaianya adalah bertanda negatif sehingga himpunan penyelesaiannya adalah

$\therefore$ Hp = $\{ x \mid x< a \text{ atau } b < x < c , x\in R\}$

Contoh soal

1. Tentukan himpunan penyelesaian $(x^2-4)(x^2-25) >0, x\in R$

   Penyelesaian

   $(x^2-4)(x^2-25) >0$ ubah ke dalam bentuk persamaan

$(x^2-4)(x^2-25) = 0$ cari faktor masing-masing

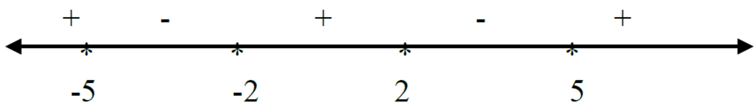
$(x+2)(x-2)(x+5)(x-5)=0$

$(x+2)=0 \vee (x-2)=0 \vee (x+5)=0 \vee (x-5)=0$

Nilai nol ruas kiri didapatkan

$x_1= -2$, $x_2=2$, $x_3= -5$ dan $x_4=5$

bila digambarkan peta nilai nol pada suatu garis bilangan terlihat sebagai berikut:



Selanjutnya kita tentukan daerah penyelesaian dengan menggunakan tanda + atau - pada selang yang dibatasi oleh nilai nol atau juga bisa pada selang yang lain, maka akan ditemukan tanda pada garis bilangan tersebut nilai positif atau nilai negatif. Setelah didapatkan nilai tersebut perhatikan pertidaksamaan pada soal, himpunan penyalesaian tinggal menyesuaikan apa yang diinginkan soal (<, dan > atau jika soalnya ≥, dan ≤.)

Sesuai dengan saoal diatas pertidaksamaannya adalah > maka himpunan penyelesaian soal diatas tanda + pada garis bilangan tersebut adalah:

∴ hp = $\{ x \mid x< -5 \text{ atau } -2 < x < 2 \text{ atau } x >5 , x \in R\}$

Berdasarkan contoh yang telah diberikan di atas jika pada soal berbentuk pertidaksamaan f(x) < g(x), f(x) dan g(x) bentuk alajabar dalam x maka dapat diselesaiakan sebagai berikut:

1) Ubahlah pertidaksamaan menjadi $f(x)-g(x) < 0$, selanjutnya ubah ke $f(x)-g(x) = 0$ sehingga ruas kanan bernilai nol
2) Faktorkan/ cari faktorialnya dari $f(x) - g(x)$
3) Tentukan nilai-nilai nol dan kutub-kutub $f(x) - g(x)$, yaitu x_1, x_2,....
4) Gambarkan peta nilai-nilai nol dan kutub-kutub itu pada suatu garis bilangan
5) Tentukan tanda $f(x) - g(x)$ dalam suatu selang yang dibatasi oleh nilai-nilai nolnya, kemudian tentukan tanda $f(x) - g(x)$ dalam selang lainnya (+ atau -)
6) Selesaiakan pertidaksamaan tersebut dan akan kita dapatkan himpunan penyelesaiannya

Contoh soal

Tentukan himpunan penyelesaian $\frac{x+1}{x-2} < \frac{2x+3}{2x-1}$, Jika x peubah pada himpunan bilangan real R

Penyelesaian:

<u>Syarat</u>

Soal bisa diselesaikan dengan $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{2}$

1). Ruas kanan jadikan nol,

$$\frac{x+1}{x-2} - \frac{2x+3}{2x-1} < 0$$

2). Ruas kiri difaktorkan,

$$\frac{(x+1)(2x-1)-(2x+3)(x-2)}{(x-2)(2x-1)} < 0$$

$$\frac{2x^2+x-1-2x^2+x+6}{(x-2)(2x-1)} < 0$$

$$\frac{2x+5}{(x-2)(2x-1)} < 0$$

3). Menentukan nilai-nilai nol ruas kiri, yaitu

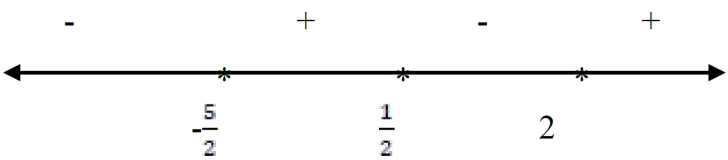
$$\frac{2x+5}{(x-2)(2x-1)} = 0$$

Didapatkan nilai dari pertidak samaan sebagai berikut:

$2x+5 = 0 \vee 2x-1 = 0 \vee x-2=0$

$x_1 = -\frac{5}{2}$ $x_2 = \frac{1}{2}$ $x_3 = 2$

4) Selanjutnya digambarkan peta nilai-nilai nol pada garis bilangan yang dibuat, sebagai berikut:



5). Tentukan tanda pada ruas dalam suatu selang yang dibatasi oleh nilai-nilai nolnya (+ atau -), kemudian tentukan tanda dalam selang lainnya. Pemberian tanda (+ atau -) pada pertidaksamaan hal ini terlihat pada gambar garis bilangan di atas, selanjutnya menentukan himpunan penyelesaian.

6). Himpunan penyelesaiannya (sesuai dari soal <)

$\therefore$ hp = $\{ x \mid x < -\frac{5}{2}$ atau $\frac{1}{2} < x < 2 , x \in R\}$

Latihan soal (Evaluasi)

Jika x peubah pada himpunan bilangan real R, tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan berikut ini.

1. $ax-3 > 3(a - x)$
2. $\frac{2x-1}{x+3} \geq 3$
3. $\frac{x+1\ x+1}{2x-42x-4} < \frac{2x+3}{4x+1}$
4. $\sqrt{1-2x} > \sqrt{3x+4}$
5. $-1 \leq \frac{2x^2-39}{4x+9} \leq 1$

3. NILAI MUTLAK

Kompetensi Dasar

Menjelaskan langkah-langkah penyelesaian nilai mutlak

Pengalaman Belajar

Mahasiswa dapat menentukan nilai mutlak

Untuk mempelajari matematika pada materi kalkulus sering kali kita dijumpai bentuk persamaan atau pertidaksamaan nilai mutlak suatu bilangan real.

Misalnya $|x-2| < 0$, $y = 2|x| - 1$, $|\sin 2x| \leq 1$.

Untuk mempermudah dalam menentukan penyelesaiannya kita perlukan batasan atau kita perhatikan definisi berikut ini:

Nilai mutlak suatu bilangan real x dapat ditulis dengan simbul $|x|$ dan didefinisikan :

$$|x| = \{0^{x,\cdot,jika x \geq 0}_{-x,jika x < 0}$$

Berdasarkan difinisi:

- Jika $x \geq 0$ diperjanjikan $\sqrt{x}$ adalah suatu bilangan tidak negatif, yang kuadratnya sama dengan x
- Jika $x < 0 \rightarrow x \leq |x|, \forall x \in R$ atau $\sqrt{x^2} = |x|$ dan $|x|^2 = x^2$

Beberapa **sifat** tentang nilai mutlak dapat kita jumpai dalam **teorema** berikut:

Misal a , b $\in$ R

1) $|a|.|b| = |a.b|$
2) $|a|:|b| = |a:b|$, $b \neq 0$
3) $a > 0$, maka $|x| < a$ bhb $-a < x < a$
4) $a > 0$, maka $|x| > a$ bhb $x < -a$ atau $x > a$

5) $|a+b| \leq |a| + |b|$

6) $|a-b| \geq |a| - |b|$

Bukti Teorema:

1. $|a|.\,|b| = \sqrt{a^2}\,\sqrt{b^2} = \sqrt{a^2 b^2} = |a.\,b|$

2. $|b|\,.\,|a{:}\,b| = |b(a{:}\,b)| = a$ shg $|a|{:}|b| = |a{:}\,b|$

3. $|x| < a \rightarrow |x|^2 < a^2$

   $x^2 < a^2$

   $x^2 - a^2 < 0$

   $(x+a)(x-a) < 0$

   $-a<x<a$

4. $|x| > a \rightarrow |x|^2 > a^2$

   $x^2 > a^2$

   $x^2 - a^2 > 0$

   $(x+a)(x-a) > 0$

   $x > 0$ atau $x < -a$

5. $|a+b| \leq |a| + |b|$

   Misal 1. $a + b \geq 0$ maka $|a| + |b| = a + b \leq |a| + |b|$

   2. $a + b < 0$ maka $|a| + |b| = -(a+b) = (-a)+(-b) \leq |a| + |b|$

6. $|a-b| \geq |a| - |b|$

   Misal $c = a - b \rightarrow a = c+b$

   $|a| = |c+b| \leq |c| + |b|$

   $|a| = |c+b| \quad |a-b| + |b| \rightarrow$

   $|a| - |b| \quad |a-b|$

Agar mudah untuk memehami nilai mutlak, ada contoh berikut:

Tentukan himpunan penyelesaian $|3x-2| < 11$, jika x peubah pada himpunan bilangan real R

Penyelesaian:

$|3x-2| < 11$

$-11 < 3x-2 < 11$

$-11 < 3x-2$ dan $3x-2 < 11$

$3x > -9$ dan $3x < 13$